Synthèse de cours PanaMaths
→ Fonctions hyperboliques

Définition

On appelle « sinus hyperbolique », « cosinus hyperbolique » et « tangente hyperbolique » les fonctions réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sinh : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$
$$\cosh : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$
$$\tanh : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Remarques :

- On peut également utiliser les notations sh, ch et th.
- La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que la fonction cosinus hyperbolique prend également des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Relation fondamentale

Pour tout réel *x*, on a :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Remarque : pour d'autres relations importantes, on se reportera au formulaire PanaMaths de trigonométrie hyperbolique.

Parité

Les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont impaires.
La fonction cosinus hyperbolique est paire.

Remarque : rappelons que toute fonction de la variable réelle dont l'ensemble de définition est symétrique peut être décomposée de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Pour la fonction exponentielle, on a simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

Continuité

Les fonctions hyperboliques sont continues sur $\mathbb{R}$.

Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1^-$$

Sens de variation

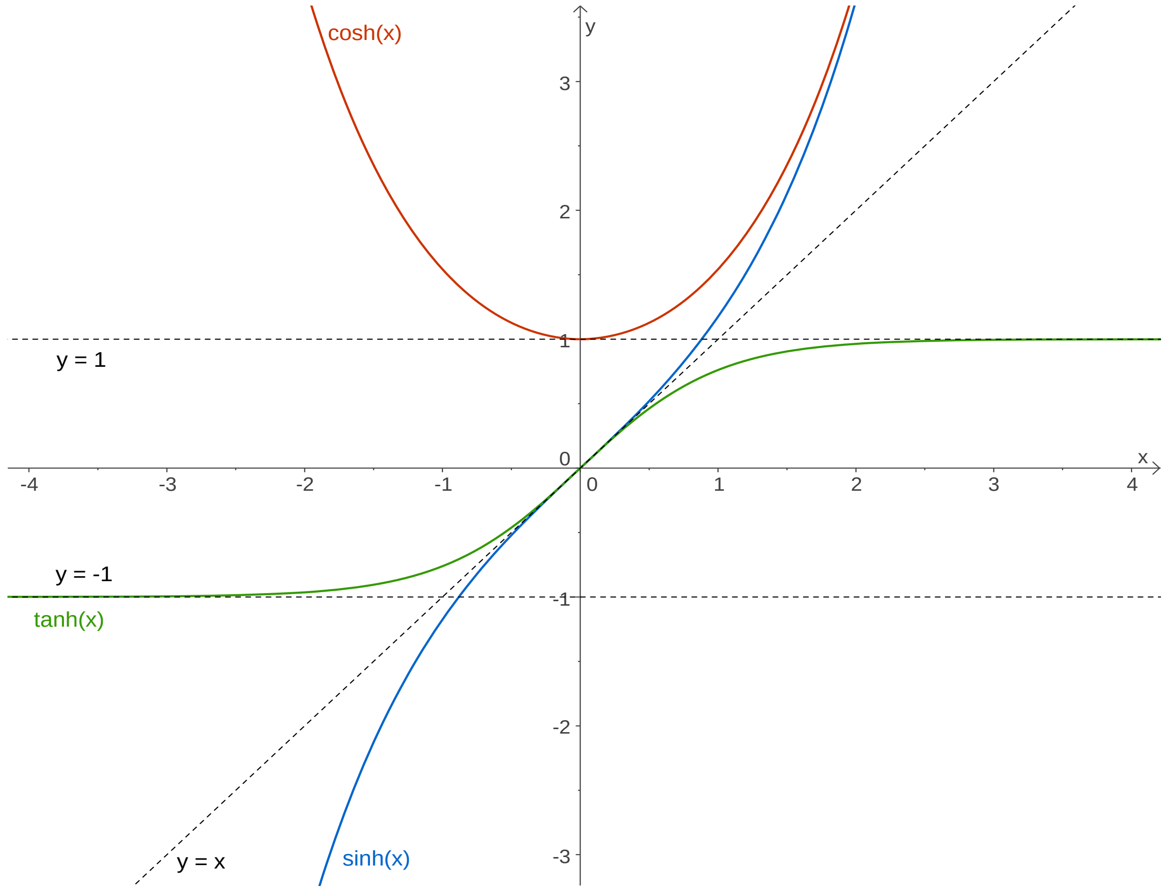
Les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
La fonction cosinus hyperbolique est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Dérivées

Les fonctions hyperboliques sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout x réel :

$$\sinh'(x) = \frac{d\sinh}{dx}(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \frac{d\cosh}{dx}(x) = \sinh(x)$$
$$\tanh'(x) = \frac{d\tanh}{dx}(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Courbes représentatives



Remarque : sur la figure ci-dessus, on a fait apparaître :

- Les deux asymptotes horizontales (à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique) d'équations $y=-1$ et $y=1$, la seconde étant également la tangente au point de coordonnées $(0\,;1)$ à la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique.
- La tangente, d'équation $y=x$, à l'origine aux courbes représentatives des fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

Equivalences

$$\sinh(x)\underset{+\infty}{\sim}\cosh(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}e^{x}$$

$$-\sinh(x)\underset{-\infty}{\sim}\cosh(x)\underset{-\infty}{\sim}\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\sinh(x)\underset{0}{\sim}\tanh(x)\underset{0}{\sim}x$$

Primitives

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$$
$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$$
$$\int \tanh(x)\,dx = \ln(\cosh(x)) + C$$

C étant une constante réelle quelconque.