Synthèse de cours PanaMaths

→ Fonctions dérivables

Dans ce document, nous ne considérons que des fonctions réelles de la variable réelle c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, les intervalles considérés sont des intervalles de longueur non nulle (i.e. non vides et non réduits à un point).

Dérivabilité

Dérivabilité en un point

Définitions

Soit I un intervalle et *f* une fonction définie sur I.
Soit *a* un point de I.

Pour tout réel *x* différent de *a*, le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé « taux d'accroissement de la fonction *f* entre *x* et *a* ».

Si ce taux admet une limite finie lorsque *x* tend vers *a* ($x \neq a$) alors cette limite est unique et on dit que « la fonction *f* est dérivable en *a* ». On écrit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Le réel $f'(a)$ est « le taux d'accroissement instantané de la fonction *f* en *a* ». On l'appelle « nombre dérivé de *f* en *a* ».

Remarques :

❶ On a, en posant $x = a + h$: $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

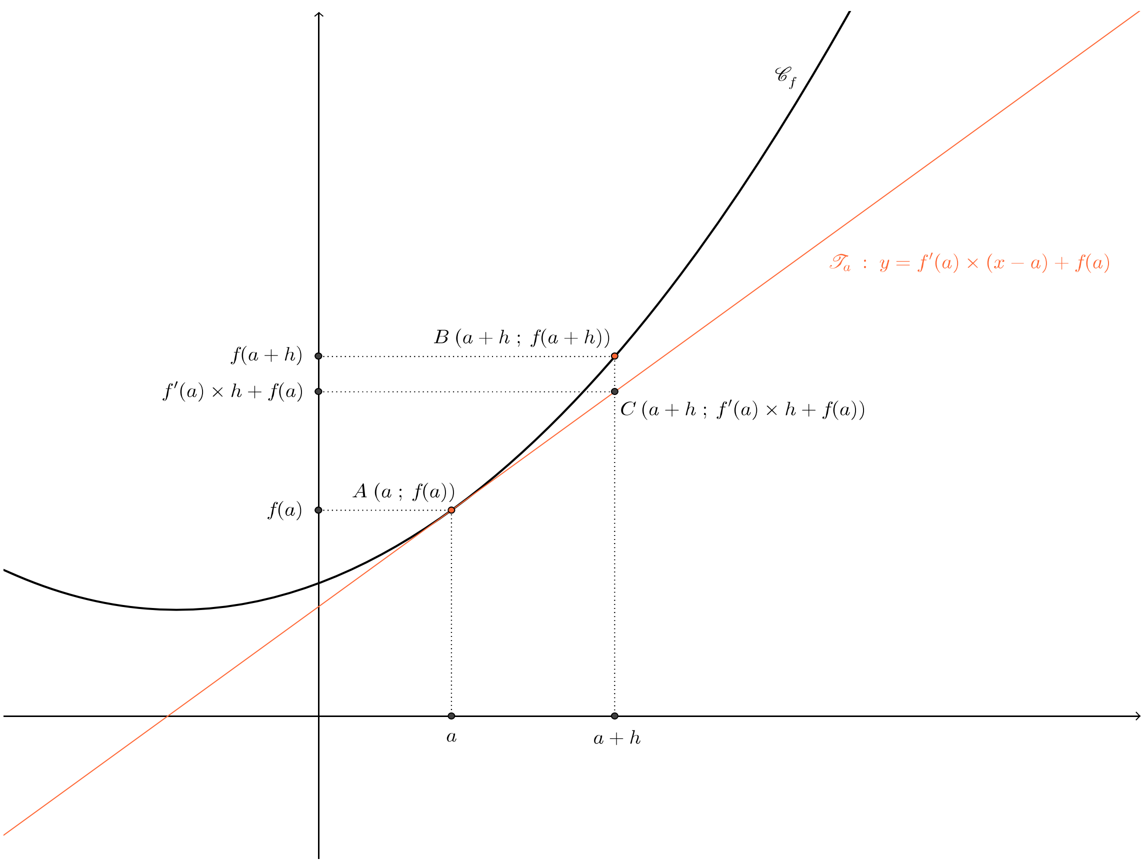
❷ Si la fonction *f* n'est pas définie à gauche (respectivement à droite) de *a*, la limite considérée s'entend pour *x* tendant vers *a* par valeurs strictement supérieures (respectivement strictement inférieures).

Interprétation graphique et approximation affine

Nous supposons que le plan soit muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ et nous notons $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction *f* dans ce repère.

Dans ces conditions, la fonction *f* admet un nombre dérivée $f'(a)$ en *a* si, et seulement si, la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une tangente $\mathscr{T}_a$ au point $\mathrm{A}\left(a\,;\,f(a)\right)$. L'équation réduite de la tangente en A s'écrit alors :

$$\boxed{y = f'(a)\times(x-a)+f(a)}$$



Si la fonction *f* est dérivable en *a*, on va pouvoir approcher $f(a+h)$, c'est-à-dire l'ordonnée du point *B* sur la figure, par $f'(a)\times h+f(a)$, c'est-à-dire l'ordonnée du point *C* sur la figure (*C* est le point d'abscisse $a+h$ situé sur la tangente $\mathscr{T}_a$). Cette approximation est une approximation affine. Elle sera d'autant meilleure que $\left|f'(a)\right|$ et *h* seront « petits ».

Remarque importante : si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers a ($x \neq a$) alors la fonction f n'est pas dérivable en a mais sa courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet au point $\mathrm{A}\left(a\,;\,f(a)\right)$ une tangente verticale.

Dérivabilité à gauche, à droite

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
Soit a un point de I.

Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a en étant strictement supérieur (respectivement strictement inférieur) à a alors cette limite est unique et on dit que « la fonction f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a ». On écrit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_d\,'(a)$$

$$\text{(respectivement } \lim_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_g\,'(a)\text{)}$$

Le réel $f_d\,'(a)$ (respectivement $f_g\,'(a)$) est appelé « nombre dérivé de f à droite (respectivement à gauche) en a ».

Remarque : l'existence d'un nombre dérivé en a à droite (respectivement à gauche) équivaut à l'existence d'une demi-tangente en $\mathrm{A}\left(a\,;\,f(a)\right)$ à droite (respectivement à gauche).

On a la propriété suivante :

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
Soit a un point de I.

f est dérivable en a **si**, **et seulement si**,
f est dérivable à gauche et à droite en a **et** $f_d\,'(a)=f_g\,'(a)$.

Dérivabilité et continuité en un point

On a le théorème fondamental suivant :

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
Soit a un point de I.

Si f est dérivable en a **alors** f est continue en a.

Mieux encore :

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
Soit a un point de I.

Si f est dérivable à gauche et à droite en a **alors** f est continue en a.

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

Si la fonction f est définie en tout point de I, on dit que « f est dérivable sur I ».
A tout réel x de I, on peut alors associer le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x. On définit ainsi une nouvelle fonction, notée f', et appelée « fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I »

Remarque : la fonction f' peut également être notée « $\frac{df}{dx}$ ». Cette notation (due à Leibniz) est très pratique dans les calculs et largement utilisée en physique, chimie, etc. Plus explicitement encore, si on a : $y = f(x)$, on utilisera la notation « $\frac{dy}{dx}$ » qui exprime l'idée d'une variation infinitésimale (« dy », celle de la variable « y ») que l'on rapporte à autre variation infinitésimale (« dx », celle de la variable « x »). En toute rigueur, on devrait alors écrire, pour ce qui est du nombre dérivé : $f'(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)(x)$. Mais à ce niveau, l'abus de notation « $f'(x) = \frac{df}{dx}$ » (ou $f'(x) = \frac{dy}{dx}$) est assez courant …

Différentiabilité en un point

Définition

Soit I un intervalle et *f* une fonction définie sur I.
Soit *a* un point de I.

On dit que « la fonction *f* est différentiable en *a* » s'il existe un réel α et une fonction ε tels que :

$$f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+\alpha h+h\varepsilon\left(h\right) \text{ avec } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\varepsilon\left(h\right)=0$$

L'égalité « $f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+\alpha h+h\varepsilon\left(h\right)$ » est alors appelé « développement limité à l'ordre 1 de la fonction *f* en *a* ».

L'application $h\mapsto\alpha h$ est appelée « différentielle de *f* en *a* ». On la note « df_a ».

Remarques :

❶ Le produit « $h\varepsilon\left(h\right)$ » peut être classiquement noté « $\mathrm{o}\left(h\right)$ ».

❷ La différentiabilité d'une fonction en un point *a* exprime l'idée que cette fonction est localement proche d'une fonction affine. Il y a donc équivalence avec la dérivabilité en *a*. (cf. le théorème ci-après). On prendra cependant garde au fait que cette équivalence est perdue avec les fonctions réelles de plusieurs variables réelles.

Théorème

Soit I un intervalle et *f* une fonction définie sur I.
Soit *a* un point de I.

f est dérivable en *a* **si**, **et seulement si**, *f* est différentiable en *a*.

Soit :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\alpha\in\mathbb{R}\ \left(\alpha=f'\left(a\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+\alpha h+h\varepsilon\left(h\right) \text{ avec } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\varepsilon\left(h\right)=0\Leftrightarrow f \text{ différentiable en } a$$

Dérivées et opérations

Dérivée d'une combinaison linéaire

Soit I un intervalle.

Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur I et **si** α et β sont deux réels **alors** la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\alpha f + \alpha g\right)' = \alpha f' + \beta g'$$

On dit que « l'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire ».

Dérivée d'un produit

Soit I un intervalle.

Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur I **alors** la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(f \times g\right)' = f' \times g + f \times g'$$

Dérivée d'un rapport

Soit I un intervalle.

Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur I et **si** la fonction g ne s'annule pas sur I **alors** la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Remarque : on retiendra le cas particulier : $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Dérivée d'une composée

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction dérivable sur I et **si** g est une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$ **alors** la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

On retiendra les cas particuliers suivants :

- $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$ (pour toute fonction u dérivable et ne s'annulant pas sur I)
- $(e^u)' = u' \times e^u$ (pour toute fonction u dérivable sur I)
- $(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}$ (pour tout réel α et toute fonction u strictement positive sur I)

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction dérivable sur I et **si** f' ne s'annule pas sur I et **si** f est bijective de I dans $f(\mathrm{I})$ **alors** la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(\mathrm{I})$ et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Dérivées d'ordre supérieur

Définitions

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si la dérivée f' de la fonction f est dérivable sur I, on l'appelle « dérivée seconde de la fonction f » et on la note « f'' ». On a donc :

$$(f')' = f''$$

La fonction f est alors dite « deux fois dérivable sur I ».

Sous réserve d'existence, on définit par récurrence les dérivées successives de f (en adoptant la convention $f^{(0)} = f$) :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

« $f^{(n)}$ » est appelée « dérivée n-ième de f sur I » et on dit que « la fonction f est dérivable à l'ordre n sur I ».

Si la fonction f est dérivable à l'ordre n sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I alors on dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Si la fonction f admet une dérivée à n'importe quel ordre n, on dit que « la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle I ».

Formule de Leibniz

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I alors la fonction $f \times g$ est elle-même n fois dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Théorème des accroissements finis et applications

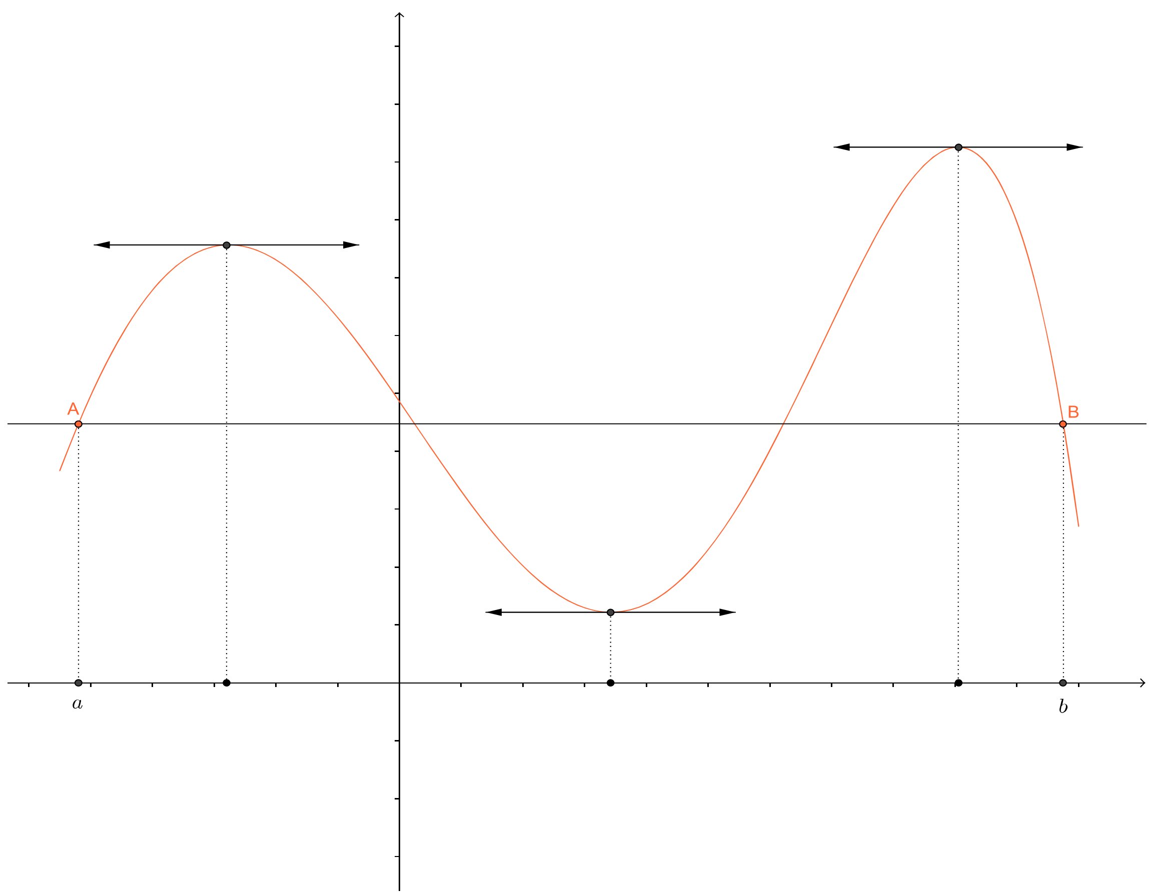
Le théorème de Rolle

Si f est une fonction définie et continue sur un segment $[a\,;b]$ ($a<b$) et **si** f est dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$ et **si** $f(a)=f(b)$ **alors** il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Remarques :

❶ La dérivée f' peut s'annuler plusieurs fois dans $]a\,;b[$ (cf. la figure ci-après).

❷ Le théorème ne nous « dit » rien de particulier sur la localisation des zéros de la fonction dérivée f'.



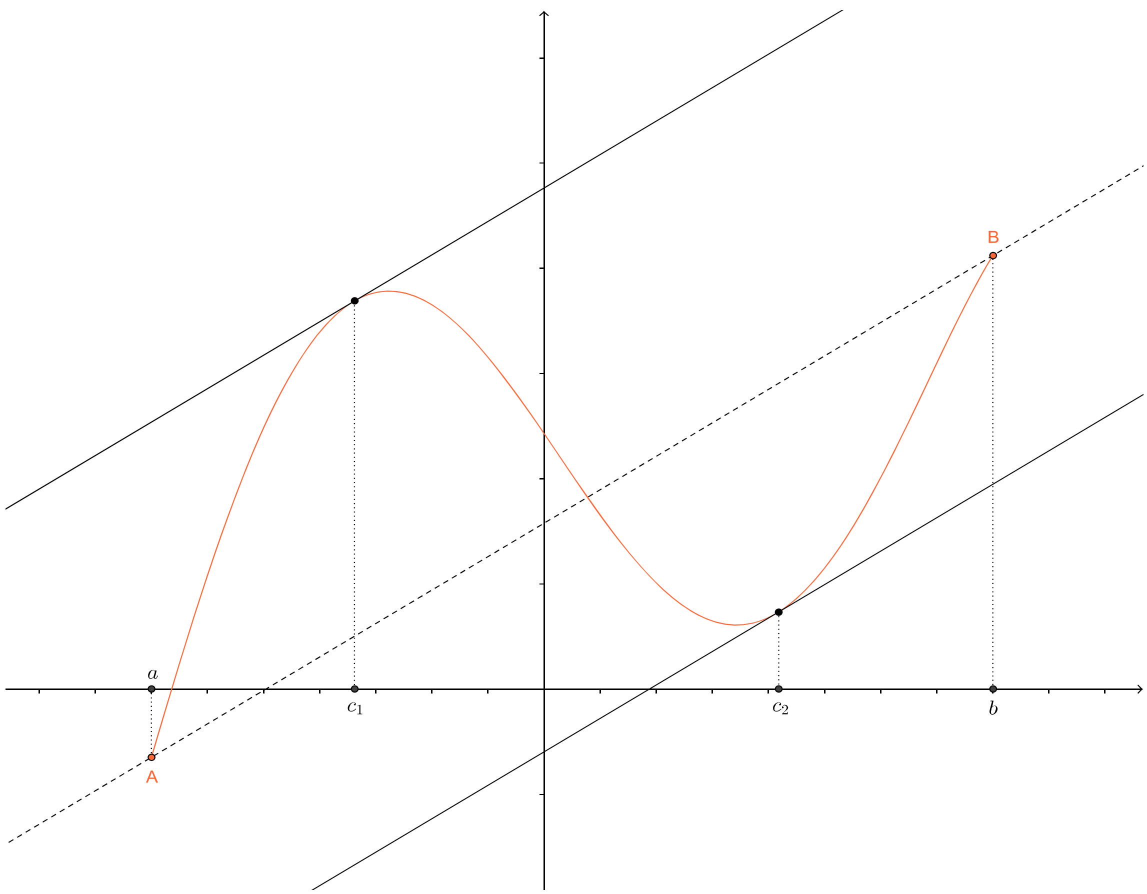
Sur la figure ci-dessus, les points A et B ont la même ordonnée ($f(a)=f(b)$) et la fonction dérivée f' s'annule trois fois sur l'intervalle $]a\,;b[$ (cf. les tangentes horizontales).

Le théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle.

Si f est une fonction définie et continue sur un segment $\left[a\,;b\right]$ ($a<b$) et **si** f est dérivable sur l'intervalle $\left]a\,;b\right[$ **alors** il existe un réel c dans $\left]a\,;b\right[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque : le cas particulier $f(a)=f(b)$ redonne le résultat du théorème de Rolle.



Sur la figure ci-dessus, le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).
En deux points (d'abscisses c_1 et c_2) de la courbe représentative de la fonction f, les tangentes sont parallèles à la droites (AB) et on a : $f'(c_1)=f'(c_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Inégalité des accroissements finis.

Le théorème des accroissements finis conduit au résultat intéressant suivant :

Théorème (inégalité des accroissements finis)

Si *f* est une fonction définie et continue sur un segment $\left[a\,;b\right]$ ($a<b$) et **si** *f* est dérivable sur l'intervalle $\left]a\,;b\right[$ et **si** il existe un réel positif *M* tel que pour tout *x* de $\left]a\,;b\right[$ on a :
$\left|f\,'(x)\right|\le M$ **alors** $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le M$.

Interprétation : la variation en valeur absolue (i.e. l'accroissement de *f* : $\left|f(b)-f(a)\right|$) de la fonction *f* sur le segment $\left[a\,;b\right]$ est majorée par $M\times\left|b-a\right|$. Cette variation sera donc finie.

Remarques :

❶ L'hypothèse « $\left|f\,'(x)\right|\le M$ » ne va pas de soi ! Pour s'en convaincre, on considèrera par exemple la fonction racine carrée sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ …

❷ Cette hypothèse est en revanche vérifiée si on suppose que la fonction *f* est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[a\,;b\right]$. Dans ce cas, on a immédiatement, du fait de la continuité de la fonction $f\,'$ sur le segment $\left[a\,;b\right]$: $\forall x\in\left[a\,;b\right],\left|f\,'(x)\right|\le\sup\limits_{[a\,;b]}\left|f\,'(x)\right|$. La borne supérieure est atteinte et on peut prendre : $M=\sup\limits_{[a\,;b]}\left|f\,'(x)\right|$.

Corollaire

Sous ces mêmes hypothèses, on a également :

Si *f* est une fonction définie et continue sur un segment $\left[a\,;b\right]$ ($a<b$) et **si** *f* est dérivable sur l'intervalle $\left]a\,;b\right[$ et **si** il existe un réel positif *M* tel que pour tout *x* de $\left]a\,;b\right[$ on a :
$\left|f\,'(x)\right|\le M$ **alors** la fonction *f* est $M-$lipschitzienne sur $\left[a\,;b\right]$.

Mêmes remarques que précédemment.

Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

On a les équivalences :

- La fonction f est croissante sur I **si**, **et seulement si**, la fonction f' est positive sur I.
- La fonction f est décroissante sur I **si**, **et seulement si**, la fonction f' est négative sur I.
- La fonction f est constante sur I **si**, **et seulement si**, la fonction f' est nulle sur I.

Cas des fonctions strictement monotones

On perd ici les équivalences.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

On a les équivalences :

- **Si** la fonction f' est strictement positive sur I **alors** la fonction f est strictement croissante sur I.
- **Si** la fonction f' est strictement négative sur I **alors** la fonction f est strictement décroissante sur I.

Les réciproques sont fausses ! On peut citer l'exemple (très) classique de la fonction cube qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée s'annule en 0.