Synthèse de cours PanaMaths (Terminale S)
→ La fonction exponentielle

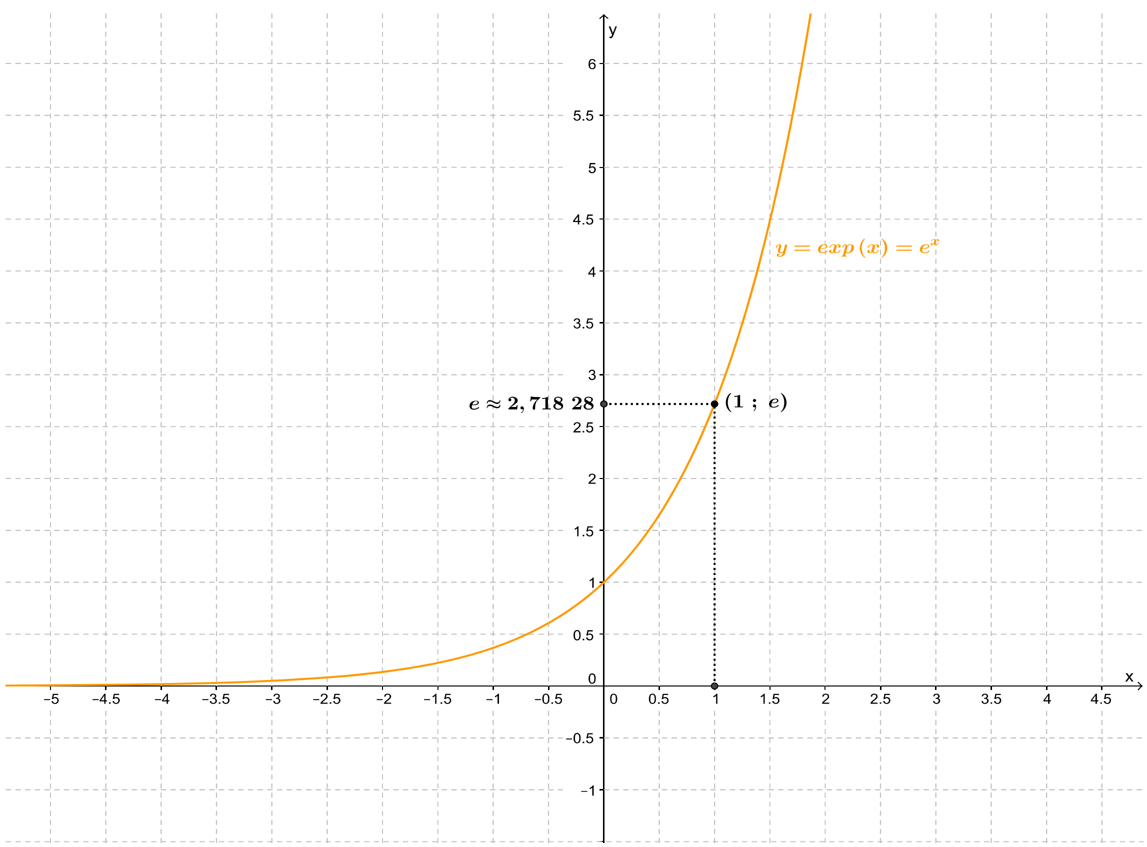
Définition et premières propriétés

Théorème-définition

La fonction exponentielle (voir la courbe représentative en orange ci-dessous), notée « $\exp$ », est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour tout réel *x*, on écrit : $\exp(x) = e^x$ (on lit « exponentielle *x* » ou « exponentielle de *x* »).



Propriétés découlant de la définition

- $e^0 = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$;
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

Propriétés algébriques

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y$;
  On peut généraliser ce résultat à l'exponentielle d'une somme de n réels :
  $$e^{x_1+x_2+\ldots+x_n} = e^{x_1}e^{x_2}\ldots e^{x_n}$$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^x\right)^n = e^{nx}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Remarque : on retrouve formellement les propriétés des puissances d'exposants relatifs (mais ici l'exposant est réel !).

Etude de la fonction exponentielle

Ensemble de définition

$$\mathscr{D}_{\exp} = \mathbb{R}$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\exp\right)'\left(x\right) = \exp\left(x\right)$$

Sens de variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Il en découle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow e^x < e^y \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Interprétation graphique de la deuxième limite : l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Equation réduite de la tangente au point d'abscisse 0

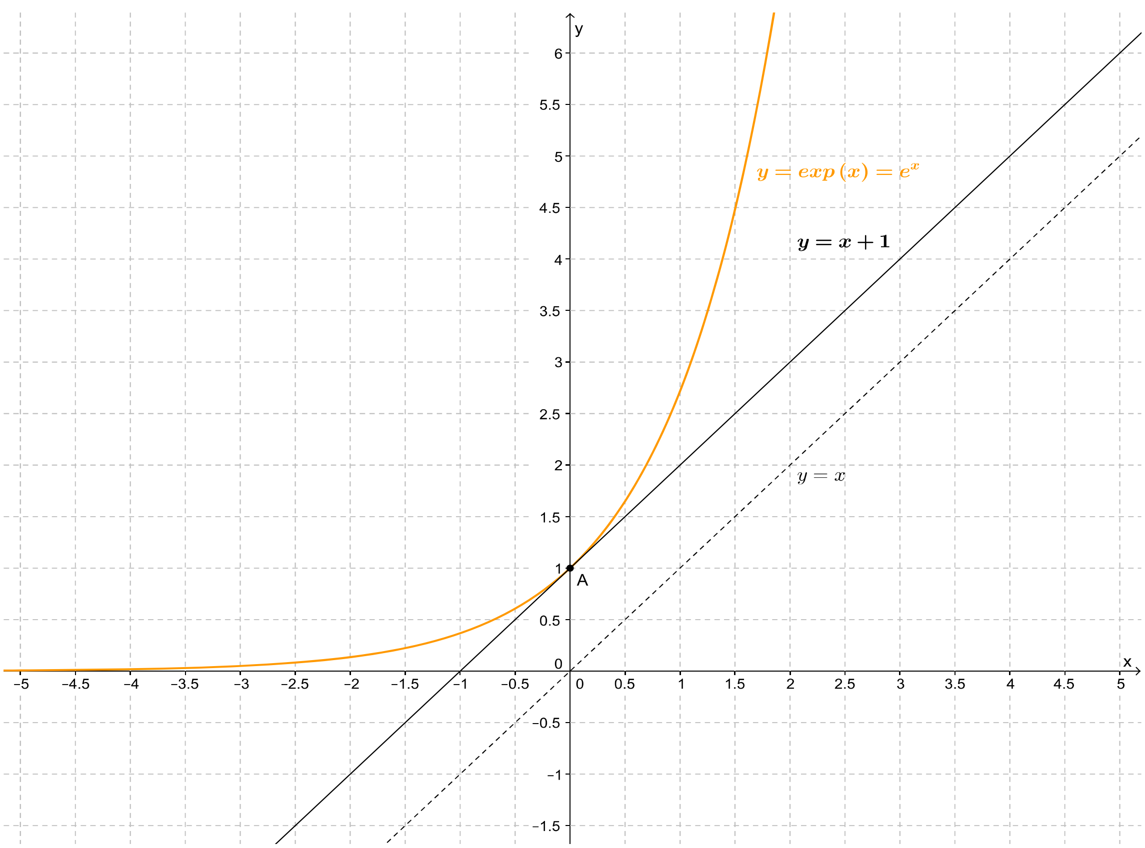
Au point de coordonnées $(0\,;1)$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet pour tangente la droite d'équation :

$$y=x+1$$

Remarques : le coefficient directeur de cette droite est donné par

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\exp'(0)=\exp(0)=1$$

Comme il vaut 1, la tangente obtenue est parallèle à la première bissectrice (équation : $y=x$).
Pour x « petit », on a l'approximation : $e^x\simeq x+1$.



Croissance comparée

Deux limites fondamentales

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$$

Complément (hors programme)

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0$$

Composée de l'exponentielle et d'une fonction dérivable

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction composée $\exp \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x\in I,\ (\exp\circ f)'(x)=\left(e^f\right)'(x)=f'(x)\times e^{f(x)}$$

On retiendra : $\left(e^f\right)'=f'\times e^f$.

Un exemple fondamental

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h: x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

D'après le théorème précédent, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en posant $f: x\mapsto -\frac{x^2}{2}$, il vient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=f'(x)\times\exp\left(f(x)\right)=-x\times e^{-\frac{x^2}{2}}$$