Synthèse de cours PanaMaths (TES)
→ Les fonctions exponentielles

Cette synthèse est conforme au nouveau programme de mathématiques de la classe de Terminale ES applicable à la rentrée 2012 : les fonctions exponentielles sont présentées en s'appuyant sur les suites géométriques de raisons strictement positives. Il est donc important, dans une large mesure, de bien maîtriser le chapitre relatif aux suites géométriques.

Généralités

Définition-théorème

Soit q un réel strictement positif.

Il existe une unique fonction *f* vérifiant :

- La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout entier naturel n : $f(n) = q^n$.
- Pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad (\mathrm{E})$

La fonction *f* est appelée « fonction exponentielle de base q » et pour tout réel x, on écrit :

$$f(x) = q^x$$

Remarques :

❶ La courbe représentative de la fonction *f* passant par tous les points de coordonnées $(n\,;q^n)$, ont dit qu'elle est « un prolongement continu » de cet ensemble de points (voir l'exemple donné page suivante).

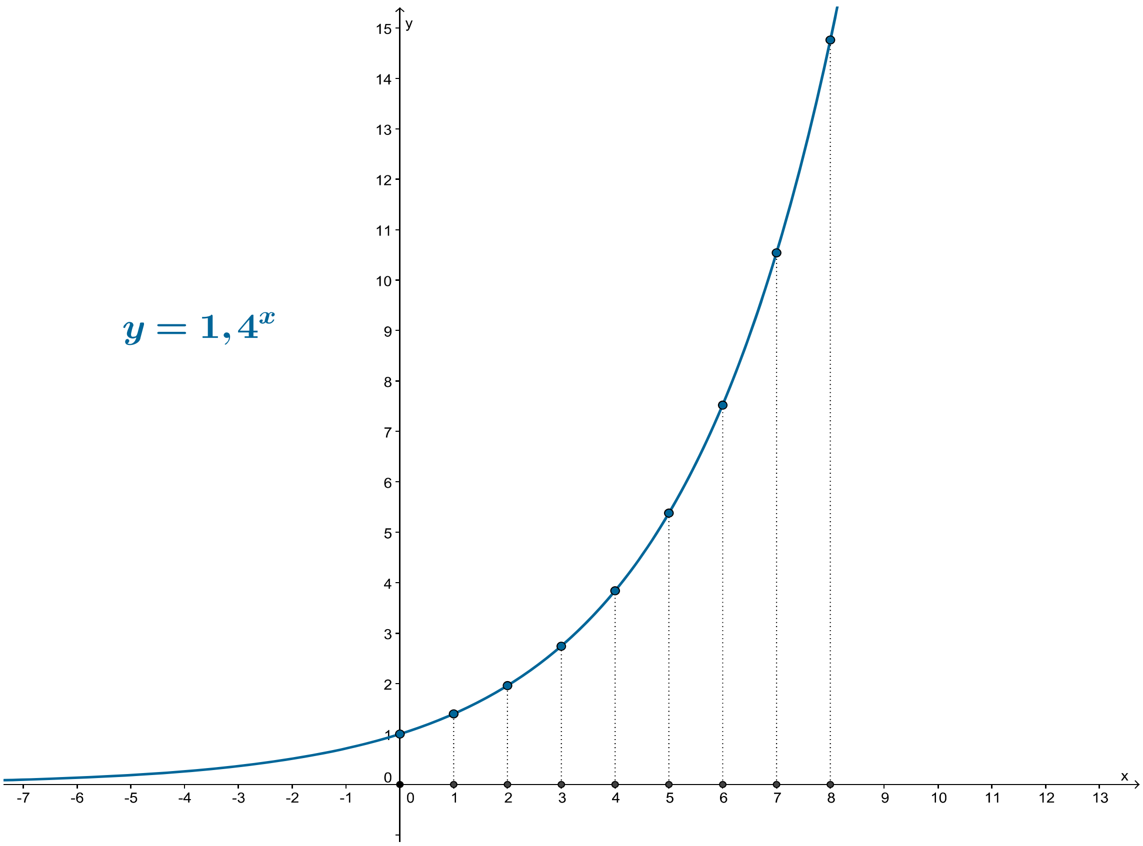
❷ Pour $n = 0$, l'égalité $f(n) = q^n$ donne $f(0) = 1$, égalité valable pour toute fonction exponentielle.

❸ L'égalité (E) est appelée « équation fonctionnelle ».

❹ En tenant compte de l'écriture « $f(x) = q^x$ », l'égalité (E) se récrit : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.
On retrouve ainsi formellement la propriété fondamentale du calcul sur les puissances. Mais dans le cadre des fonctions exponentielles, « l'exposant » peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

❺ L'égalité (E) se généralise à n réels quelconques :

$$q^{x_1+x_2+\ldots+x_n} = q^{x_1} \times q^{x_2} \times \ldots \times q^{x_n}$$



Ci-dessus, nous avons fourni la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1,4^x$ ainsi que les points de coordonnées $\left(n\,;1,4^n\right)$ pour n entier naturel inférieur ou égal à 8.

Propriétés algébriques découlant directement de la définition

- $\forall x \in \mathbb{R},\ q^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(q^x\right)^n = q^{nx}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$

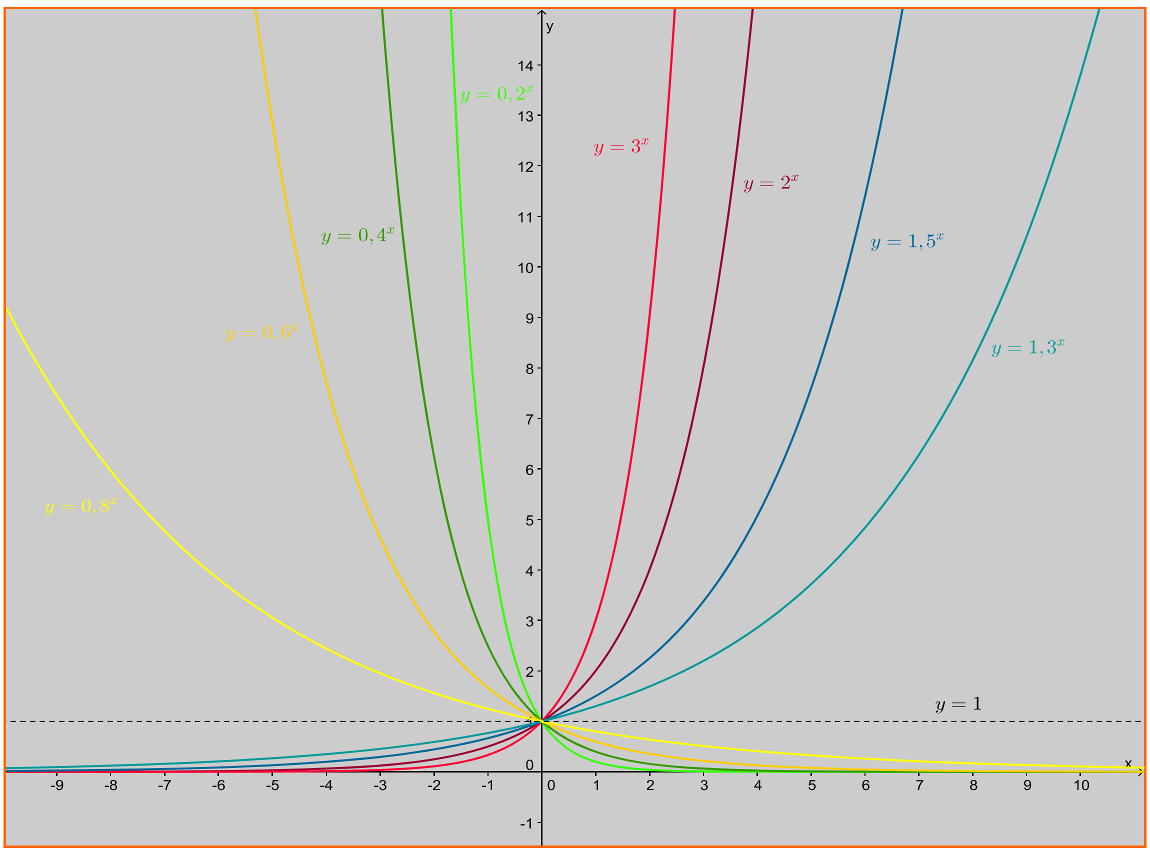
Sens de variation des fonctions exponentielles

Le résultat suivant est à rapprocher de celui relatif aux suites géométriques de raisons strictement positives.

Soit *f* la fonction exponentielle de base *q*.

- Si $q \in \left]0\,;1\right[$, la fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, la fonction *f* est constante sur $\mathbb{R}$ (elle prend la valeur 1 pour toute valeur de *x*).
- Si $q > 1$, la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Nous fournissons ci-dessous quelques courbes représentatives de fonctions exponentielles pour quelques valeurs de *q*.



La fonction exponentielle

Définition-théorème

Il existe une unique fonction exponentielle admettant 1 pour nombre dérivé en $x=0$.

Il s'agit de la fonction exponentielle de base *e* avec $e \simeq 2,718\,28$.
Cette fonction est notée « exp » et est appelée, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, « fonction exponentielle » ou « exponentielle ».

Remarque : comme $e>1$, il découle immédiatement de ce qui précède que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés algébriques

On retrouve bien sûr les propriétés mentionnées plus haut mais on adapte l'écriture :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^x\right)^n = e^{nx}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$

Dérivée

On a le résultat remarquable suivant :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même :

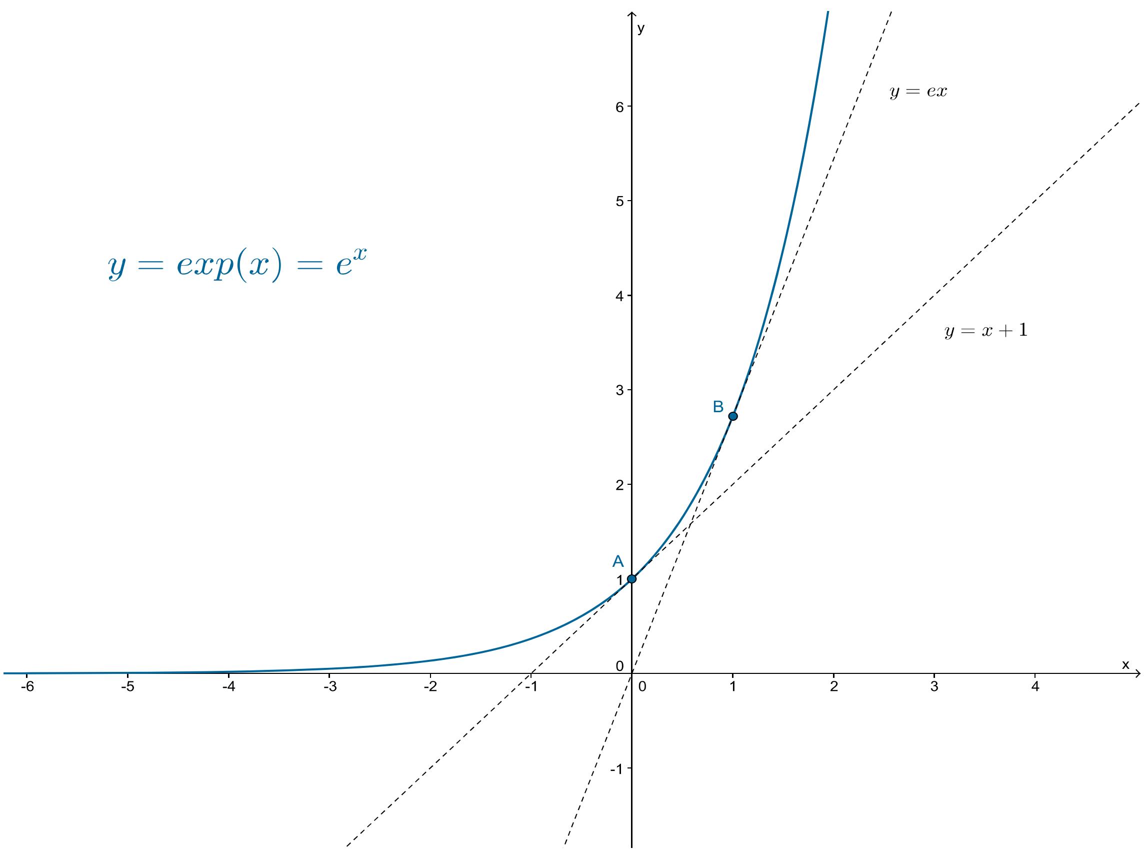
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x)$$

Remarque : comme la fonction exponentielle (en tant que dérivée d'elle-même) prend des valeurs strictement positives, on retrouve le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative

L'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle est bien sûr à connaître (cf. la figure ci-dessous). On retiendra (ou on saura très rapidement retrouver) les éléments suivants :

- $A(0;1) \in \mathscr{C}_{\exp}$
- La tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point $A(0;1)$ admet pour équation réduite : $y = x+1$ (cette droite est donc parallèle à la première bissectrice).
- La tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point $B(1;e)$ admet pour équation réduite : $y = ex$ (cette droite passe donc par l'origine du repère).



Composée de l'exponentielle et d'une fonction dérivable

Dans ce qui suit, f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Dérivée

La fonction composée $\exp \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I,\ (\exp \circ f)'(x) = \left(e^f\right)'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$$

On retiendra : $\left(e^f\right)' = f' \times e^f$.

Primitives

La fonction $f' \times (\exp \circ f)$ est intégrable sur l'intervalle I et ses primitives sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto e^{f(x)} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.