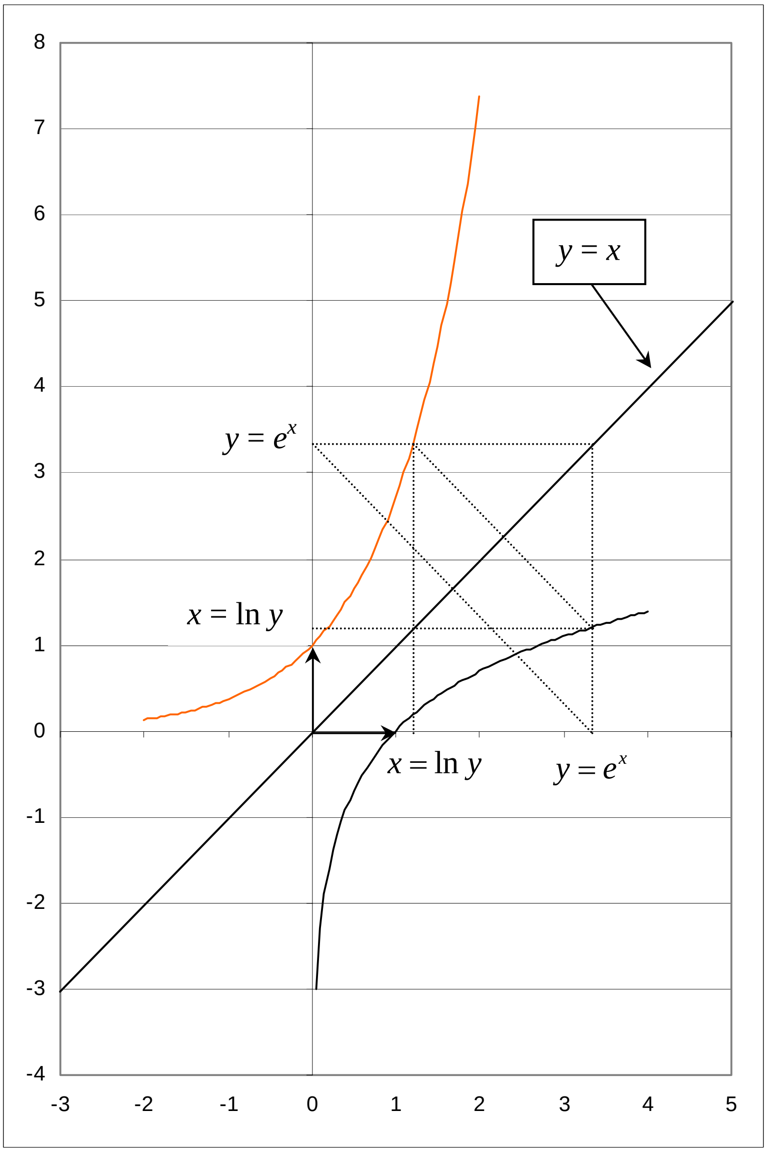
Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ La fonction exponentielle

Définition

On définit la fonction exponentielle, notée « exp », comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien (voir graphes ci-dessous) :

$$\exp : \mathbb{R} \to \left]0,+\infty\right[$$
$$x \mapsto y = \exp(x) = e^x \text{ où } x = \ln y$$



Propriétés équivalentes à la définition

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^{x}\right)=x \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ e^{\ln x}=x\end{array}}$$

Premières propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x}>0$;
- $e^{0}=1$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$;
- $\forall\left(x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n}\right) \in \mathbb{R}^{n},\ e^{x_{1}+x_{2}+\ldots+x_{n}}=e^{x_{1}} e^{x_{2}} \ldots e^{x_{n}}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(e^{x}\right)^{n}=e^{n x}$;
- $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^{2},\ e^{x}=e^{y} \Leftrightarrow x=y$

Etude de la fonction exponentielle

Ensemble de définition

$$\boxed{D_{\exp}=\mathbb{R}}$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x)=\exp(x)$$

Sens de variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante**.

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} \exp(x)=\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} e^{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x \rightarrow-\infty} \exp(x)=\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} e^{x}=0\end{array}}$$

Approximation affine au voisinage de 0

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=1} \text{ ou } \boxed{e^{x} \simeq 1+x}$$

Il existe une fonction φ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x}=1+x+x \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \varphi(x)=0$.

Limite fondamentale

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

Composée de l'exponentielle et d'une fonction dérivable

Dans ce qui suit, *f* est une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

Dérivée

La fonction composée $\exp o f$ est dérivable sur l'intervalle *I* et on a :

$$\boxed{\forall x \in I,\ (\exp o f)'(x) = \left(e^f\right)'(x) = f'(x)e^{f(x)}}$$

Primitives

La fonction $f'.(\exp o f)$ est intégrable sur l'intervalle *I* et ses primitives sont les fonctions définies par :

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$

où *C* est une constante réelle quelconque.

Puissances réelles

Définition

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x \ln a}}$$

Propriétés

- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(a^x\right) = x \ln a$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ 1^x = 1$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^x a^y = a^{x+y}$;
- $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^x b^x = (ab)^x$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(a^x\right)^y = a^{xy}$