Synthèse de cours PanaMaths
→ Droites et plans de l'espace

Droites de l'espace

Définition

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
La droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

On dit que « $(\mathrm{A}, \vec{u})$ est un repère de la droite (d) ».

Remarques :

- Une droite (d) de l'espace admet une infinité de repères.
- Si A et B sont deux points distincts d'une droite (d) de l'espace alors $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$, $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$, $(\mathrm{B}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$ et $(\mathrm{B}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$, par exemple, sont des repères de (d).

Caractérisation barycentrique

Soit A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
Le segment $[\mathrm{AB}]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de <u>même signe</u>.

Représentation paramétrique

On suppose ici que l'espace est rapporté à un repère.
Soit une droite (d) passant par le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.
La droite (d) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ tels qu'il existe un réel t avec :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$$

Cette égalité équivaut à :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

L'écriture :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

est appelée « représentation paramétrique de la droite (d) ».

Remarque : une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemple :

$$\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -\dfrac{5}{3}t \\ z = 11 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Est une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $\mathrm{A}(-5;0;11)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(2;-\dfrac{5}{3};0\right)$.

Plans de l'espace

Définition

Un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace est défini par un point et deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Ils constituent un repère du plan considéré.
Le plan $(\mathcal{P})$ de repère $(A;\vec{u},\vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels *x* et *y* avec :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Remarques :

- Un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace admet une infinité de repères.
- Trois points A, B et C non alignés de l'espace définissent un unique plan (on peut le noter (ABC)) dont $\left(\text{A}\,;\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}}\right)$, par exemple, est un repère.

Caractérisation barycentrique

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

Le triangle ABC et les points qui lui sont intérieurs constituent l'ensemble des barycentres des points A, B et C affectés de coefficients de <u>même signe</u>.

Equation cartésienne

On suppose que l'espace est rapporté à un repère $\mathcal{R}$.

Quelle que soit la nature de $\mathcal{R}$, une équation cartésienne d'un plan $(\mathcal{P})$ est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

les réels *a*, *b* et *c* étant non tous nuls.

Si le repère $\mathcal{R}$ est <u>orthonormal</u>, alors on a l'équivalence :

$$(\mathcal{P}) \text{ admet pour vecteur normal : } \vec{n}(a,b,c)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\mathcal{P}) \text{ admet une équation cartésienne de la forme } ax+by+cz+d=0$$

où *d* est une réel.

Intersections

Intersection d'une droite et d'un plan

L'intersection d'une droite $(\mathcal{D})$ et d'un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace peut-être :

- **Vide** (on dit que « la droite est parallèle au plan ») ;
- **Un point** (on dit que « la droite et le plan sont sécants » au point considéré) ;
- **Une droite** (on dit que « la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$ ») ;

Remarques : pour déterminer l'intersection d'une droite $(\mathcal{D})$ et d'un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace on sera, en général, confronté aux deux situations suivantes :

- On dispose d'une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ et d'une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$. On est alors amené à résoudre un système de 4 équations (les 3 de la représentations paramétrique et l'équation cartésienne du plan) à 4 inconnues (le paramètres et les 3 coordonnées du(des) point(s) d'intersection).
- On dispose d'un système d'équations cartésiennes $(\mathcal{D})$ (voir ci-dessous, la troisième remarque du paragraphe « Intersection de deux plans ») et d'une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$. On est alors amené à résoudre un système de 3 équations (les 2 équations cartésiennes du système d'équations cartésiennes et l'équation cartésienne du plan) à 3 inconnues (les 3 coordonnées du(des) point(s) d'intersection).

Intersection de deux plans

L'intersection de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ de l'espace peut-être :

- **Vide** (ont dit que « les deux plans sont strictement parallèles ») ;
- **Une droite** (on dit que « les deux plans sont sécants suivant une droite ») ;
- **Un plan** (on dit que « les deux plans sont confondus »).

Remarques :

- En règle générale, on disposera d'une équation cartésienne pour chacun des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$. On sera donc amené à résoudre un système de deux équations à trois inconnues de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz=-d \\ a'x+b'y+c'z=-d' \end{cases}$$

  Un tel système admet 0 (l'intersection $(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}')$ sera alors vide) où une infinité de solutions (l'intersection $(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}')$ correspondra alors à une droite ou un plan de l'espace).
- Si on travaille dans un repère orthonormal, on pourra discuter à partir des vecteurs normaux $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n}'(a',b',c')$:
  - Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires, alors l'intersection $(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}')$ est une droite.
  - Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires alors l'intersection $(\mathcal{P})\cap(\mathcal{P}')$ est vide ou un plan.
- Une droite de l'espace peut toujours être considérée comme l'intersection de deux plans (non parallèles) et il y a une infinité de façon de la faire. Supposons donc qu'une droite $(\mathcal{D})$ soit l'intersection de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations cartésiennes respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

Alors le système :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

est appelé « système d'équations cartésiennes » de la droite $(\mathcal{D})$.

Il y a une infinité de tels systèmes permettant de représenter la droite $(\mathcal{D})$.

Intersection de trois plans

L'intersection de trois plans $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$ et $(\mathcal{P}'')$ de l'espace peut-être :

- **Vide** (on dit que « les trois plans sont strictement parallèles ») ;
- **Un point** (l'intersection de deux des trois plans est une droite et l'intersection de cette droite et du troisième plan est un point. On dit que « les trois plans sont sécants suivant un point ») ;
- **Une droite** (l'intersection de deux des trois plans est une droite et cette droite est incluse dans le troisième plan. On dit que « les trois plans sont sécants suivant une droite ») ;
- **Un plan** (on dit que « $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$ et $(\mathcal{P}'')$ sont confondus »).

Remarque : en général, on disposera pour chacun des trois plans d'une équation cartésienne et la détermination de leur intersection consistera à résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.