Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Développements limités

Définitions

Au voisinage d'un point

Soit a un réel et f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un voisinage $]a-\alpha, a+\alpha[$ de a sauf, éventuellement, en a.
On dit que <u>f possède un développement limité en a à l'ordre n</u> si, et seulement si, il existe $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction réelle ε de la variable réelle définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, sauf éventuellement en a, tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + x^n\varepsilon(x) \text{ quand } x \to a, x \neq a$$
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \varepsilon(x) = 0$$

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n$ s'appelle la <u>partie régulière</u> du développement limité.

Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Soit A un réel et f une fonction réelle de la variable réelle définie sur $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$).
On dit que f possède un développement limité en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à l'ordre n si, et seulement si, il existe $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction réelle ε de la variable réelle définie sur $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) tels que :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n} \text{ quand } x \to +\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0 \text{ (resp. } \lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0\text{)}$$

$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}$ s'appelle la <u>partie régulière</u> du développement limité.

Remarque : on peut toujours se ramener à un développement limité à l'origine.

- Si on cherche un développement limité en a, on pose $x = a + h$ et on a :
  $f(x) = f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + ... + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$ quand $h \to 0, h \neq 0$
- Si on cherche un développement limité en $+\infty$ ou en $-\infty$, on pose $x = \frac{1}{h}$ et on a :
  $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + ... + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$ quand $h \to 0, h \neq 0$

Partie principale d'un développement limité

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle admettant en *a* le développement limité :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + x^n\varepsilon(x)$$

On suppose que l'ensemble $\{k \in \{0,1,2,\ldots,n\} / a_k \neq 0\}$ est non vide et on note α son plus petit élément. Il existe alors une fonction réelle β de la variable réelle telle que :

$$f(x) = a_\alpha(x-a)^\alpha + x^\alpha\beta(x) \text{ et } \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \beta(x) = 0$$

$a_\alpha(x-a)^\alpha$ est appelée <u>la partie principale</u> du développement limité et on a, au voisinage de *a*, l'équivalence : $f(x) \sim a_\alpha(x-a)^\alpha$.

Propriétés des développements limités

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle et *a* un réel quelconque.

1. Si *f* admet un développement limité en *a* à l'ordre n, il est unique ;
   Conséquences :
   a. Si *f* est paire, la partie régulière du développement limité de *f* en *a* ne comporte que des puissances paires ;
   b. Si *f* est impaire, la partie régulière du développement limité de *f* en *a* ne comporte que des puissances impaires ;
2. *f* possède un développement limité en *a* à l'ordre 0 $\Leftrightarrow$ *f* admet une limite finie en *a* ;
3. Si *f* est continue en *a*, alors :
   f admet un développement limité en *a* d'ordre 1 $\Leftrightarrow$ *f* est dérivable en *a*
   On a alors : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ (Différentiabilité de *f* en *a*)

Formule de Taylor-Young

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle et *a* un réel quelconque. On suppose que *f* est *n* fois dérivable en *a*. Alors la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

est le développement limité de *f* en *a* à l'ordre *n*.

Opérations sur les développements limités

Soient *f* et *g* deux fonctions réelles de la variable réelle et *a* un réel quelconque.
On suppose que *f* et *g* admettent chacune un développement limité en *a* d'ordre *n* :

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h) = P(h) + x^n\varepsilon(h)$$

$$g(a+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \ldots + b_nh^n + h^n\beta(h) = Q(h) + x^n\beta(h)$$

$$\text{avec } \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \beta(x) = 0$$

Alors :

1. La fonction somme, $f+g$, admet un développement limité en a d'ordre n :
$$\left(f+g\right)(a+h)=\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)h+\left(a_2+b_2\right)h^2+...+\left(a_n+b_n\right)h^n+h^n\left(\varepsilon+\beta\right)(h)$$
2. La fonction produit, *fg*, admet un développement limité en a d'ordre n :
$$\left(fg\right)(a+h)=c_0+c_1h+c_2h^2+...+c_nh^n+h^n\gamma(h)=R(h)+h^n\gamma(h)$$
où le polynôme *R* est obtenu en ne conservant du produit polynomial *PQ* que les termes de degré inférieur ou égal à *n*.
3. En supposant $b_0\neq 0$, la fonction rapport, $\dfrac{f}{g}$, admet un développement limité en a d'ordre *n* dont la partie régulière est obtenue en effectuant la division suivant les puissances croissantes de *P* par *Q* à l'ordre *n*.
4. La fonction composée, gof, admet un développement limité en a d'ordre n :
$$\left(gof\right)(a+h)=c_0+c_1h+c_2h^2+...+c_nh^n+h^n\gamma(h)=R(h)+h^n\gamma(h)$$
où le polynôme *R* est obtenu en ne conservant du polynôme composé QoP que les termes de degré inférieur ou égal à *n*.

Intégration d'un développement limité

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle et *a* un réel quelconque.
On suppose que *f* est dérivable sur un voisinage $\left]a-\alpha,a+\alpha\right[$ de *a* et que sa dérivée possède un développement limité en a d'ordre n :
$$f'(a+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+...+a_nh^n+h^n\varepsilon(h)$$
Alors *f* possède un développement limité en *a* d'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+a_0h+\frac{a_1}{2}h^2+\frac{a_2}{3}h^3+...+\frac{a_n}{n+1}h^{n+1}+h^{n+1}\beta(h)}$$

Dérivation d'un développement limité

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle et *a* un réel quelconque.
On suppose que *f* est dérivable sur un voisinage $\left]a-\alpha,a+\alpha\right[$ et que *f* possède un développement limité en *a* d'ordre $n+1$:
$$f(a+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+...+a_nh^n+a_{n+1}h^{n+1}+h^{n+1}\varepsilon(h)$$
Alors f' possède un développement limité en *a* d'ordre *n* qui s'écrit :

$$\boxed{f'(a+h)=a_1+2a_2h+3a_3h^2+...+\left(n+1\right)a_{n+1}h^n+h^n\beta(h)}$$

Développement limité généralisé

Soit a un réel quelconque et f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un voisinage $]a-\alpha, a+\alpha[$ de a sauf, éventuellement, en a.
On dit que <u>f possède un développement limité généralisé en a</u> si, et seulement si, il existe $(a_0, a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^k$, un réel m non nul et une fonction réelle ε de la variable réelle définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, sauf éventuellement en a, tels que :

$$f(a+h) = \frac{1}{|h|^m}\left(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_k h^k + h^k \varepsilon(h)\right) \text{ quand } h \to 0, h \neq 0$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \varepsilon(h) = 0$$

<u>Le développement limité généralisé est d'ordre k-m</u>.

Notes :

1. Si m est entier, on écrira :
$$f(a+h) = \frac{1}{h^m}\left(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_k h^k + h^k \varepsilon(h)\right)$$
2. Comme $a_0 \neq 0$, on a : $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} |f(a+h)| = +\infty$.

Opérations sur les développements limités généralisés

Soient f et g deux fonctions réelles de la variable réelle et a un réel quelconque.
On suppose que f et g admettent les développements limités généralisés suivants en a :

$$f(a+h) = \frac{1}{|h|^p}\left(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_k h^k + h^k \varepsilon(h)\right) = \frac{1}{|h|^p}\left(P(h) + h^k \varepsilon(h)\right)$$

$$g(a+h) = \frac{1}{|h|^q}\left(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + ... + b_k h^k + h^k \beta(h)\right) = \frac{1}{|h|^q}\left(Q(h) + h^k \beta(h)\right)$$

$$\text{avec } \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varepsilon(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \beta(x) = 0$$

Alors :

1. La fonction produit, fg, admet un développement limité généralisé en a d'ordre $k-p-q$:
$$f(a+h)g(a+h) = \frac{1}{|h|^{p+q}}\left(c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + ... + c_k h^k + h^k \gamma(h)\right)$$
2. La fonction rapport, $\frac{f}{g}$, admet un développement limité généralisé en a d'ordre $k-p+q$:
$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{1}{|h|^{p-q}}\left(d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + ... + d_k h^k + h^k \varphi(h)\right)$$