

Synthèse de cours PanaMaths (Terminale S)

→ Les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes

Définitions

On pose i tel que $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} , est l'ensemble : $\{z = x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Le réel x est appelé « partie réelle du nombre complexe z » et est notée : $\Re(z)$.

Le réel y est appelé « partie imaginaire du nombre complexe z » et est notée : $\Im(z)$.

L'écriture $z = x + iy$ est appelée « forme algébrique du nombre complexe z ».

Si $\Re(z) = 0$ le nombre complexe z est appelé « imaginaire pur ».

Premières propriétés

- $z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$;
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
On a : $z = z' \Leftrightarrow \Re(z) = \Re(z')$ et $\Im(z) = \Im(z') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$;
- $z = x + iy \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

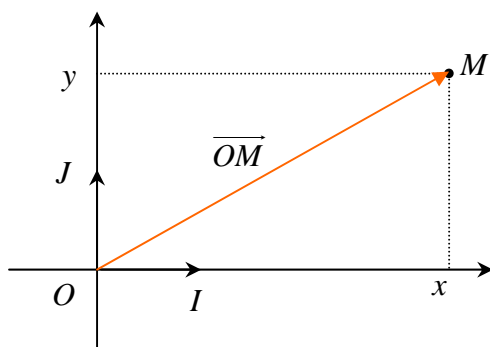
Représentation géométrique et plan complexe

On rapporte le plan orienté à un repère orthonormal direct $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$.

A tout complexe $z = x + iy$ on associe le point M (que l'on peut également noter $M(z)$ ou $M(x + iy)$) de coordonnées (x, y) : $\overline{OM} = x\overline{OI} + y\overline{OJ}$.

On dit alors que l'on travaille dans « le plan complexe ».

$M(z)$ est appelé « image du complexe z » et le complexe z est appelé « affiche du point M ».



→ L'axe des abscisses correspond à l'ensemble des réels.

→ L'axe des ordonnées correspond à l'ensemble des imaginaires purs.

Note : « affiche » est un nom féminin.

Premières opérations sur les nombres complexes

Multiplication d'un complexe par un réel

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et a un réel. On a :

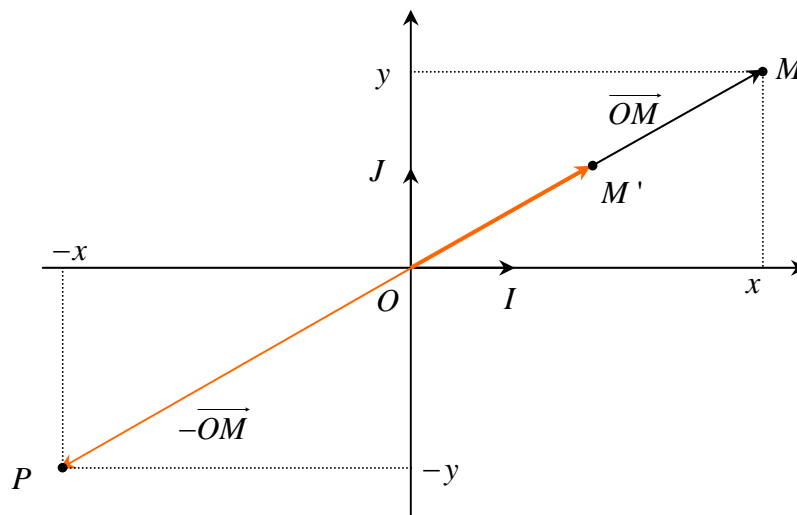
$$az = a(x + iy) = ax + iay$$

En d'autres termes : $\Re(az) = a\Re(z)$ et $\Im(az) = a\Im(z)$.

Sur la figure ci-dessous nous avons positionné un point M' d'affixe az avec $0 < a < 1$.

→ Cas particulier : pour $a = -1$, on obtient l'opposé du nombre complexe z : $-z = -x - iy$.

Sur la figure ci-dessous, nous avons positionné le point P d'affixe $-z$. Il s'agit du symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine.



Somme et différence

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 / z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on note respectivement $z + z'$ et $z - z'$ la somme et la différence des nombres complexes z et z' et on a :

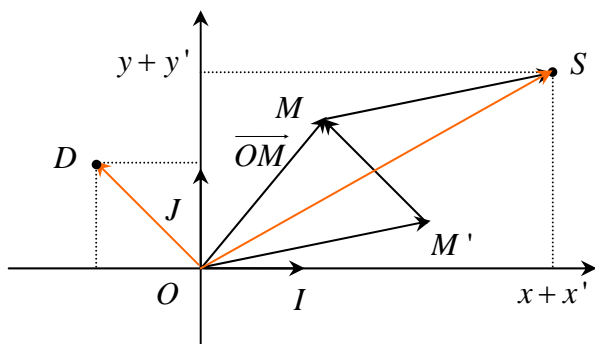
$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ z - z' &= (x - x') + i(y - y') \end{aligned}$$

En d'autres termes :

- $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$ et $\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$.
- $\Re(z - z') = \Re(z) - \Re(z')$ et $\Im(z - z') = \Im(z) - \Im(z')$.

→ Représentation géométrique.

On désigne par M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et z' .



Le point S d'affixe $z+z'$ est défini par :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}'.$$

Le point D d'affixe $z-z'$ est défini par :

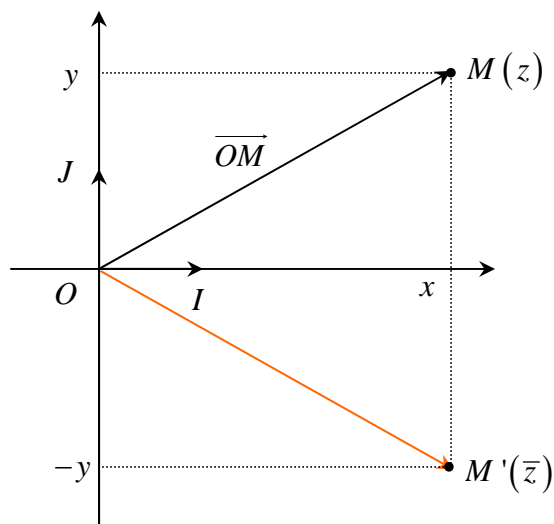
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{M'M}.$$

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle « conjugué de z », noté \bar{z} , le complexe : $x - iy$.



Géométriquement, le point M' d'affixe \bar{z} est le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, du point M d'affixe z .

Premières propriétés

- $\bar{\bar{z}} = z$. On dit que « les complexes z et \bar{z} sont conjugués ».
- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ est un réel et $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$ est un imaginaire pur.
- z est un réel $\Leftrightarrow \Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.
- Soit $z = x + iy$. On a : $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$.

Autres opérations sur les nombres complexes

Produit

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 / z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on note zz' le produit des nombres complexes z et z' et on a :

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Rapport

$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on note $\frac{z}{z'}$ le rapport des nombres complexes z et z' et on a :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{x'^2 + y'^2} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{-xy' + x'y}{x'^2 + y'^2}$$

Autres propriétés de la conjugaison

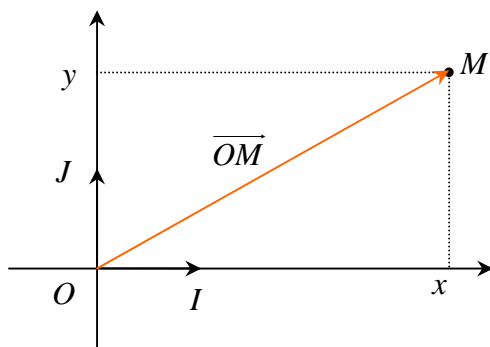
- Conjugué d'une somme : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- Conjugué d'un produit : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$.
- Conjugué d'un rapport : $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle « module de z », noté $|z|$, le réel positif : $\sqrt{x^2 + y^2}$.



→ Interprétation géométrique

Si M est le point d'affixe z , $|z|$ est la distance du point O au point M et c'est donc aussi la norme du vecteur \overline{OM} :

$$|z| = d(O, M) = \|\overline{OM}\|$$

Propriétés

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = |z|^2$;
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z||z'|$;
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right|$

Inégalité triangulaire

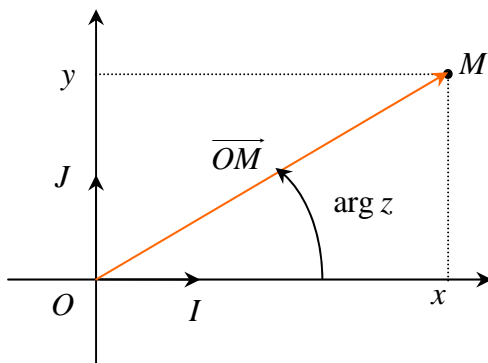
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z+z'| \leq |z|+|z'|$$

On a l'égalité si, et seulement si, il existe un réel a tel que $z' = az$ ou $z = az'$ (c'est à dire si et seulement si les points O , $M(z)$ et $M'(z')$ sont alignés).

Formes trigonométriques d'un nombre complexe

Arguments d'un nombre complexe non nul

On considère un nombre complexe z non nul et le plan complexe. Soit M le point d'affixe z . On appelle alors « argument de z », noté $\arg z$, toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.



- L'argument d'un nombre complexe est donc défini modulo 2π : si θ est une mesure donnée de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ alors les autres mesures de cette angle sont de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}^*$).
- Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.

Premières propriétés de l'argument

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg \bar{z} = -\arg z$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \pi + \arg z$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.

On peut alors mettre z sous la forme :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{où } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

Une telle écriture est appelée « forme trigonométrique » de z .

Remarques :

- un nombre complexe admettant une infinité d'arguments, il admet une infinité d'écritures trigonométriques.
- On a : $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|}$.
- Si $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique du nombre complexe non nul z alors on peut écrire : $z = (-r)(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$. Dans ce cas on a $r' < 0$ et l'écriture $r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ n'est pas une forme trigonométrique du nombre complexe z .

Autres propriétés de l'argument

- $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg(zz') = \arg z + \arg z'$;
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$;
- $\forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \arg z$;
- Soit $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \pi + \arg z$.

Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exponentielle complexe (Euler)

Pour tout réel θ , on appelle « exponentielle complexe », notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe :

$$\cos \theta + i \sin \theta$$

Remarque : dans cette écriture introduite par Euler, et comme le nom l'indique, e désigne la base du logarithme népérien.

→ Euler a également fourni la très belle formule suivante, cas particulier de la précédente ($\theta = \pi$) :

$$e^{i\pi} = -1$$

Formules d'Euler

A partir de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ on tire les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul dont une forme trigonométrique est :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

Alors on a :

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i \arg z}$$

Cette écriture est appelée « forme exponentielle » du nombre complexe z .

Remarque : un nombre complexe admettant une infinité d'arguments, il admet une infinité de formes complexes.

Propriétés de la forme exponentielle

- Soit z un nombre complexe non nul et $re^{i\theta}$ une forme exponentielle de z . Alors $re^{-i\theta}$ est une forme exponentielle de \bar{z} .
- Soient z et z' deux complexes non nuls de formes exponentielles $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ respectivement. On a alors :

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \text{ et } \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

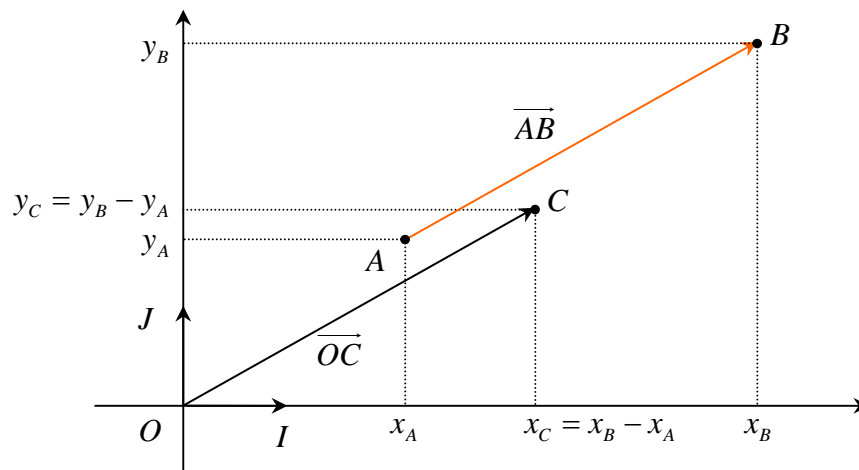
Nombres complexes et géométrie

Affixe et norme d'un vecteur

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B .

Alors le vecteur \overrightarrow{AB} admet :

- comme affixe : $z_B - z_A$.
(c'est celle du point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$)
- comme norme : $|z_B - z_A|$.
(c'est la longueur du segment $[AB]$)



Angle de deux vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On a :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right)$$

Applications

- Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires si, et seulement si :
 - $A = B$;
 - ou $C = D$;
 - ou : $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel.

- Deux vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} sont orthogonaux si, et seulement si :
 - $A = B$;
 - ou $C = D$;
 - ou : $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

Le cercle

Cercle de centre et de rayon donnés

On considère, dans le plan complexe, le cercle \mathcal{C} de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r > 0$.

Le point M d'affixe z appartient à \mathcal{C} si, et seulement si, il existe un réel θ tel que :

$$z = \omega + re^{i\theta}$$

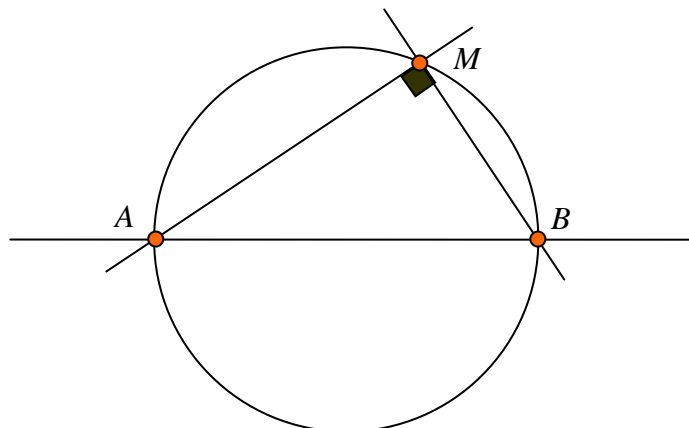
Remarque : cette expression est « simplement » celle d'un complexe z vérifiant : $|z - \omega| = r$.

Cercle dont on connaît un diamètre

On considère, dans le plan complexe, le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, A et B étant deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B .

Le point M , différent de A et B , d'affixe z appartient à \mathcal{C} si, et seulement si le complexe $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ est un imaginaire pur.

Remarque : cette caractérisation traduit simplement le fait que l'angle \widehat{AMB} est droit.



Transformations ponctuelles

Généralités

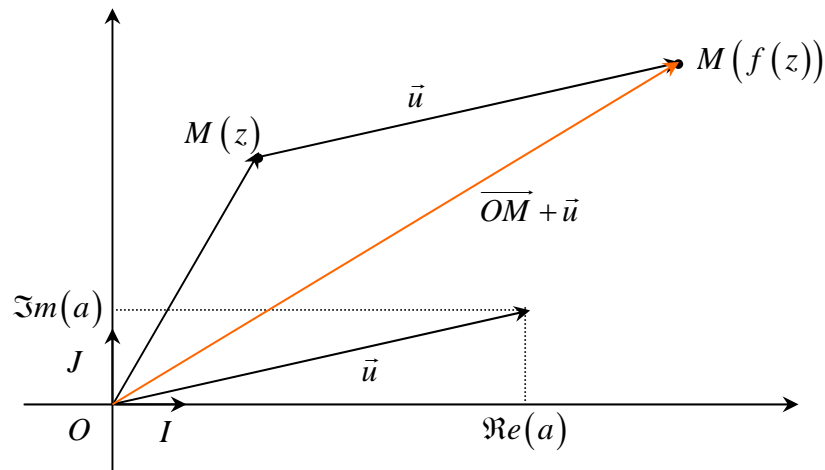
On considère une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} (f est donc une fonction complexe de la variable complexe) qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $f(z) = z'$. En se plaçant dans le plan complexe, $f(z)$ est l'affixe du point $F(M) = M'$, image du point M d'affixe z par la transformation géométrique F . La transformation F associant à un point du plan un autre point du plan, on dit qu'il s'agit d'une « transformation ponctuelle du plan ».

Dans le cadre précédent, on dit que f est l'« expression complexe » de la transformation du plan F .

Translation

→ Fonction $f : z \mapsto f(z) = z + a$ où a est un nombre complexe donné.

La transformation géométrique F associée à f est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe a .



Par exemple la fonction $f : z \mapsto f(z) = z + 3 - 5i$ est l'expression complexe de la translation du plan complexe de vecteur \vec{u} d'affixe $3 - 5i$.

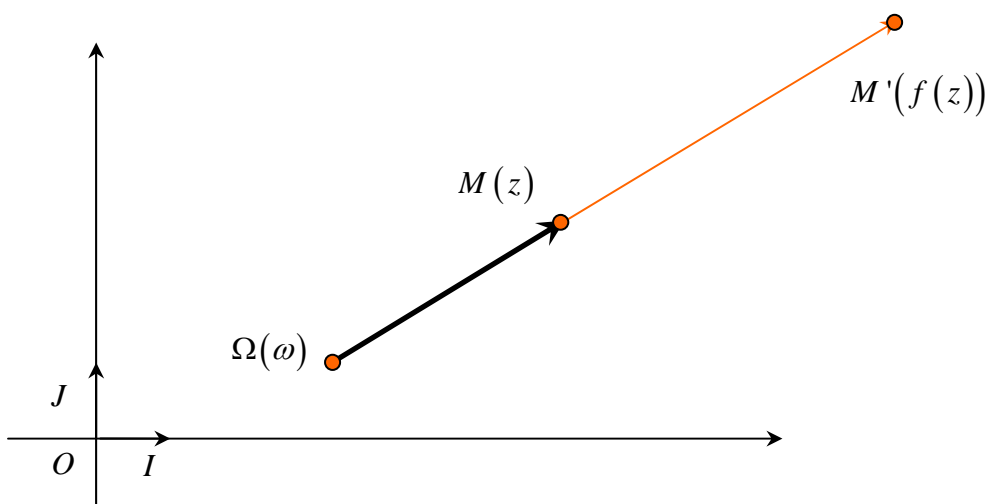
Remarque : si $a = 0$, la transformation considérée est simplement l'identité du plan.

Homothétie

→ Fonction $f : z \mapsto f(z) = az + b$ où a est un nombre réel donné non nul et différent de 1, b un complexe donné.

La transformation géométrique F associée à f est
l'homothétie de rapport a et de centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

On a alors l'égalité caractéristique : $f(z) - \omega = a(z - \omega)$.



Par exemple la fonction $f : z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} + i$ est l'expression complexe de l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2} + 2i$.

Remarque : pour identifier une éventuelle homothétie à partir d'une expression complexe donnée de la forme $f(z) = az + b$, on commence par identifier le coefficient de z . On conclura positivement s'il est réel, non nul et différent de 1 (si $a = 1$, on a affaire à une translation. Dans le cas de l'identité, $a = 1$ et $b = 0$, on a affaire à une homothétie ...). Dans le cas (général) où a est réel non nul et différent de 1, l'affixe du centre sera alors obtenue en résolvant l'équation $f(z) = z$ (plutôt qu'en retenant et appliquant la « formule » $\omega = \frac{b}{1-a}$), une homothétie de rapport différent de 1 possédant qu'un seul point invariant.

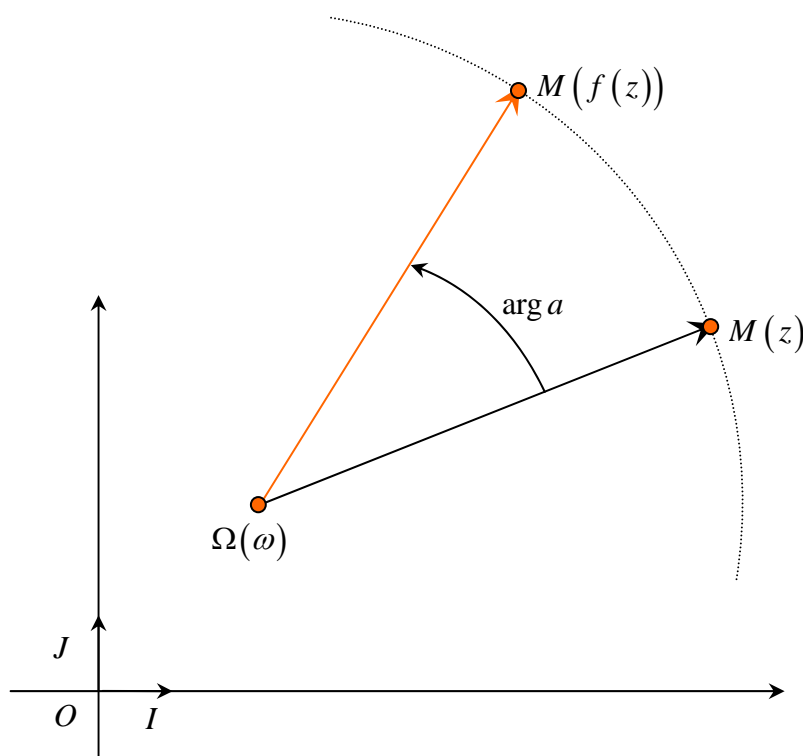
Rotation

→ Fonction $f : z \mapsto f(z) = az + b$ où a est un nombre complexe (non réel) donné vérifiant $|a|=1$, b un complexe donné.

La transformation géométrique F associée à f est
la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg a$.

Comme $|a|=1$, on a $a = e^{i \arg a}$ et on a l'égalité caractéristique :

$$f(z) - \omega = a(z - \omega) = e^{i \arg a} (z - \omega)$$



Par exemple la fonction $f : z \mapsto f(z) = \frac{1}{2} \left[(1+i\sqrt{3})z + (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}) \right]$ est l'expression complexe de la rotation de centre le point Ω d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Comme dans le cas d'une homothétie, l'affixe du centre sera plutôt obtenue en résolvant l'équation $f(z) = z$.

L'équation du second degré à coefficients réels dans \mathbb{C}

Racines carrées dans \mathbb{C}

Soit a un nombre réel.

Il admet dans \mathbb{C} deux racines carrées :

- si a est positif, ses racines carrées complexes sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$ (elles sont confondues pour $a = 0$).
- si a est strictement négatif, ses racines carrées complexes sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Par exemple, les racines carrées complexes de -169 sont $13i$ et $-13i$; celles de 25 sont -5 et 5 .

Equation du second degré

On cherche les solutions dans \mathbb{C} de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{E})$$

où a , b et c sont trois réels, a étant non nul.

On introduit le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on a la discussion suivante :

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine réelle double :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$