Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Complétude

Suites de Cauchy d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit E un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy » si on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Remarque : si une suite est de Cauchy pour une norme donnée alors elle est de Cauchy pour toute autre norme équivalente à cette norme. En particulier, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, pour établir qu'une suite est de Cauchy, il suffit de l'établir pour une norme au choix (dans un tel espace, toutes les normes sont équivalentes).

Théorèmes

Soit E un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente **alors** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy **alors** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence a **alors** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers a.

Remarque : lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$, de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy (donc bornée), on va pouvoir, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, extraire une sous-suite convergente. La limite de cette sous-suite est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui va donc converger vers elle. Ainsi, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Espace vectoriel normé complet

Définition

Soit E un espace vectoriel normé.

Si toute suite de Cauchy de E est convergente, on dit que « E est un espace vectoriel normé complet » ou que « E est un espace de Banach ».

Remarques :
(1) Stefan BANACH (Cracovie 1892 – Lvov 1945) est un des pères de l'analyse fonctionnelle ;
(2) D'après ce que nous avons vu à la page précédente, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont donc des espaces de Banach.

Théorème

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ l'espace vectoriel normé produit associé.

$$E \text{ complet} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ E_i \text{ est complet.}$$

Remarque : on déduit immédiatement de ce théorème que les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets.

Partie complète d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit E un espace vectoriel normé et soit A une partie de E.

Si toute suite de Cauchy de A est convergente <u>dans A</u>, on dit que « A est une partie complète de E ».

Remarque : une partie complète est fermée (mais dans le cas général, on n'a pas la réciproque).

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé complet et soit A une partie de E.

$$A \text{ partie complète de } E \Leftrightarrow A \text{ est une partie fermée de } E.$$

Critère de Cauchy pour une application à valeurs dans un espace de Banach

Soit E un espace vectoriel normé et soit A une partie de E.
Soit F un espace de Banach.
Soit f une application de A dans F et a un point adhérent à A.

$$F \text{ admet une limite en } a \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - a\| \leq \alpha \text{ et } \|y - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

Remarque : l'intérêt du critère de Cauchy est de conduire à l'existence de la limite sans la faire intervenir explicitement.