Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Compacité dans les espaces vectoriels normés

Généralité

Définition

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

On dit que « A est une partie compacte de E » si de toute suite (u_n) d'éléments de A on peut extraire une suite convergeant dans A.

Première propriétés

Soit E un espace vectoriel normé.

- Une intersection quelconque de parties compactes de E est une partie compacte de E.
- Une union finie de parties compactes de E est une partie compacte de E.
- Toute partie fermée d'une partie compacte de E est une partie compacte de E.

Soit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ un produit de n espaces vectoriels normés.
Si pour tout entier naturel i dans $[\![1\,;n]\!]$, K_i est une partie compact de E_i alors le produit $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$ est une partie compacte de E.

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé.

Si K est une partie compacte de E alors K est bornée, fermée et complète.

Le cas de la dimension finie

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées de cet espace.

On a la formulation équivalente :

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Si (u_n) est une suite bornée d'éléments de E **alors** on peut en extraire une suite convergente.

Remarque : en particulier, on retrouve la propriété classique des suites réelles ou complexes bornées :

« De toute suite réelle ou complexe bornée on peut extraire une suite convergente »

Du théorème de Bolzano-Weierstrass, on tire le théorème fondamental suivant :

Théorème fondamental

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, pour démontrer, par exemple, qu'une suite de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ converge, on pourra essayer de démontrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.

On peut aussi formuler le théorème comme suit :

« Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach »

Compacité et continuité

Théorème fondamental

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

Si f est une application continue d'une partie K compacte de E dans F **alors** $f(K)$ est une partie compacte de F.

On en tire le théorème suivant :

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé.

Si f est une application continue d'une partie compacte non vide K de E dans $\mathbb{R}$ **alors** elle est bornée et atteint ses bornes sur K.

En d'autres « termes » :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall x \in K, \left|f(x)\right| \leq M \quad (f \text{ bornée})$$

et

$$\exists(\alpha, \beta) \in K^2 \,/\, f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x) \text{ et } f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x)$$

(f atteint ses bornes sur K)

Théorème de Heine

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

Si f est une application continue d'une partie compacte non vide K de E **alors** f est uniformément continue sur K.