Synthèse de cours (Terminale S)

→ Calcul intégral

Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle [a;b]

Dans cette première partie, on considère une fonction *f* continue positive sur un intervalle $[a;b]$ ($a \leq b$) et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

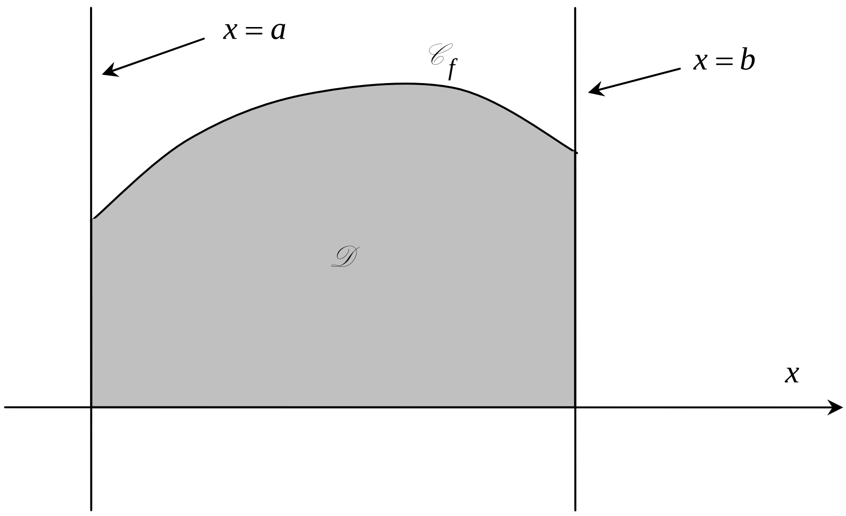
Notion de domaine sous la courbe

Définition

On appelle « domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ » l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan vérifiant :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Sur la figure ci-dessous, le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ correspond à la surface grisée et est noté $\mathscr{D}$.



Propriété

Le domaine situé sous la courbe admet une aire.

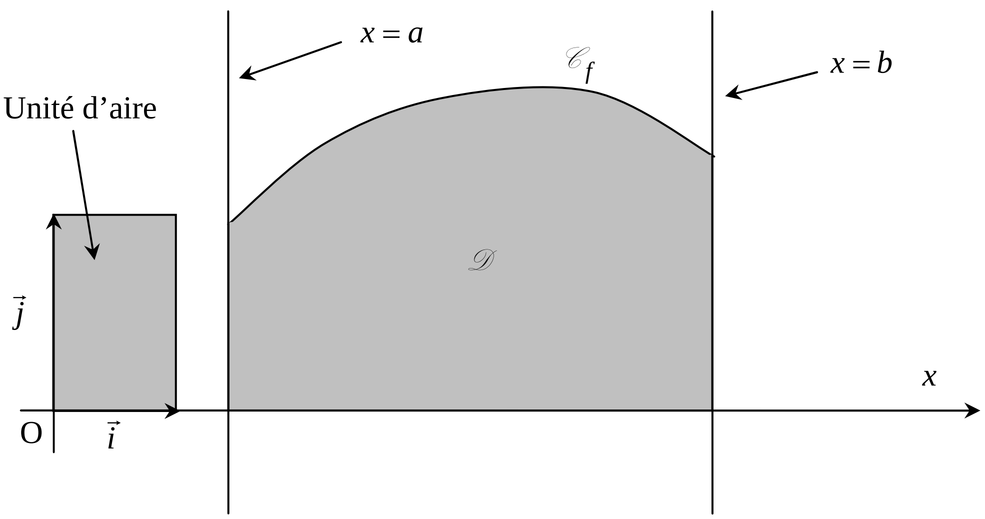
Intégrale d'une fonction continue positive

L'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est appelée « intégrale de la fonction *f* de *a* à *b* » et est notée :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Les réels *a* et *b* sont appelés « les bornes » de l'intégrale ; *a* est la borne inférieure et *b* la borne supérieure.

Elle est exprimée en « unité d'aire », l'unité d'aire étant définie comme l'aire du rectangle construit à partir du repère orthogonal considéré (cf. figure ci-dessous).



Remarque : dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, la variable *x* est dite « muette ». On peut la remplacer par un autre nom sans que la signification ni la valeur de l'intégrale changent :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(\theta)\,d\theta = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$$

Soulignons le cas particulier : lorsque $a = b$, le domaine sous la courbe se réduit à un segment et son aire est nulle :

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Valeur moyenne

Définition

On suppose ici $a < b$.

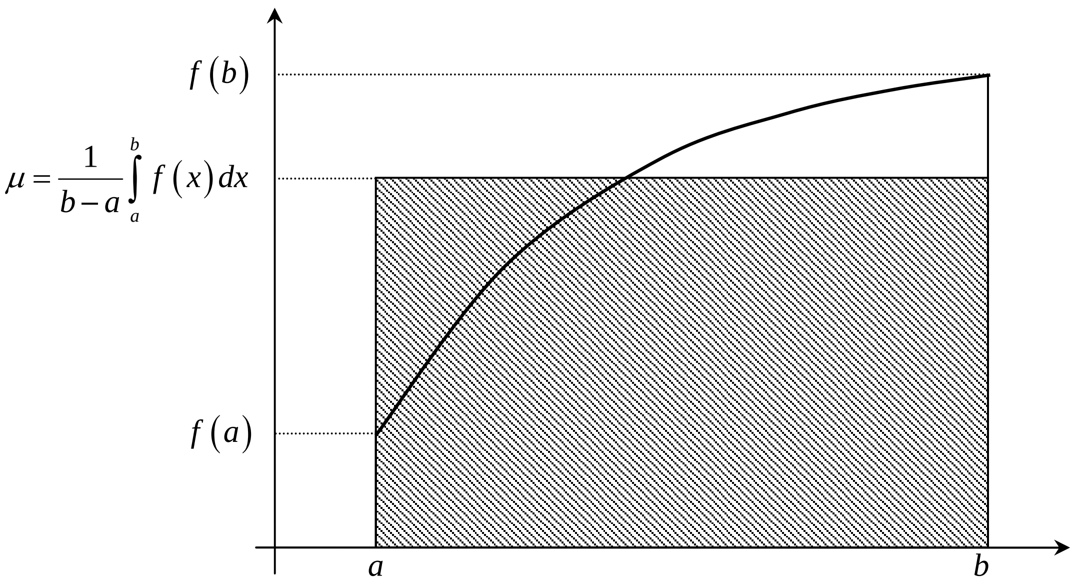
On appelle « valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[a;b]$ » le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique

Les réels μ et $b - a$ sont les dimensions d'un rectangle (en gris sur la figure ci-dessous) dont l'aire est égale à l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ ($m \times (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$).

En d'autres termes, le réel μ est la valeur prise par une fonction constante dont l'intégrale sur l'intervalle $[a,b]$ est égale à celle de *f* sur ce même intervalle.



Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a;b]

Dans cette seconde partie, on conserve les hypothèses faites sur la fonction f sauf la positivité : f ne prend plus nécessairement des valeurs positives sur l'intervalle $[a;b]$.

Intégrale d'une fonction continue négative sur un intervalle [a;b]

Définition

Le domaine $\mathscr{D}$ considéré (voir la figure ci-dessous) est cette fois l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan vérifiant :

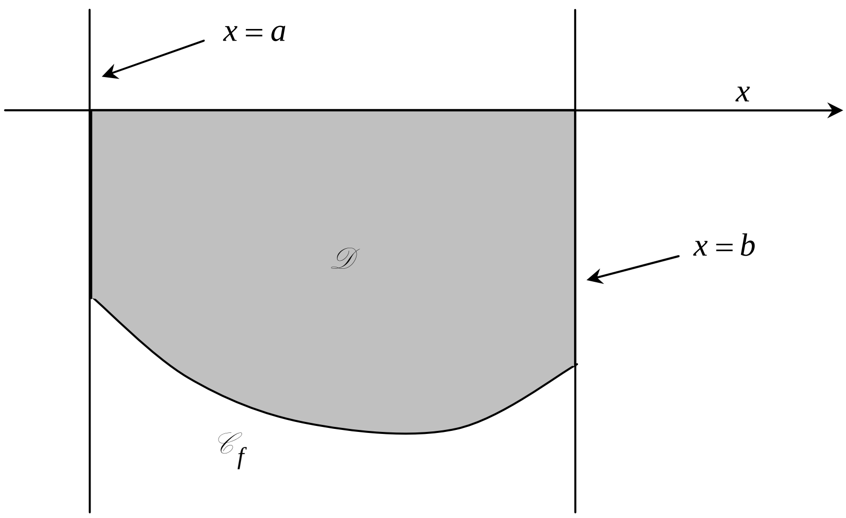
$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases}$$

Si on note $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ l'aire de ce domaine on a, par définition :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}(\mathscr{D})$$

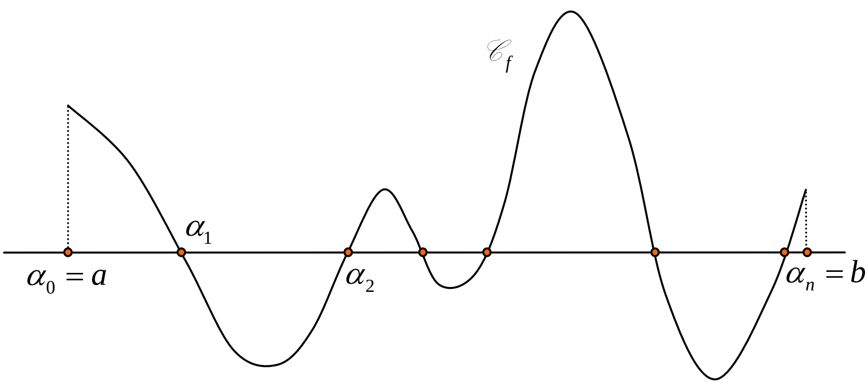
Remarque : on aurait pu adopter l'approche équivalente consistant à considérer la fonction $-f$ qui prend des valeurs positives (on est ainsi ramené à la situation de la première partie).

On pose alors : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b (-f)(x)\,dx$.



Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a;b]

Nous considérons cette fois la situation générale suivante (on suppose que la fonction *f* s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a;b[$) :



On découpe alors l'intervalle $[a;b]$ en intervalles où la fonction *f* garde un signe constant.
Si on note $\alpha_0 = a$, $\alpha_n = b$ et α_1, α_2, …, α_{n-2} et α_{n-1} les $n-1$ points de l'intervalle $]a;b[$ où *f* s'annule, on a :

$$\boxed{\int_{\alpha_0}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0=a}^{\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n=b} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x)\,dx}$$

Inversion des bornes de l'intégrale

Pour tout couple de réels $(a;b)$, si la fonction *f* est continue sur l'intervalle $[a;b]$ (lorsque $a \le b$) ou sur l'intervalle $[b;a]$ (lorsque $b \le a$) , on pose :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Remarque ❶ : en prenant $a = b$, on retrouve : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Remarque ❷ : on peut rapprocher ces égalités de propriétés analogues valables pour les vecteurs : $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Valeur moyenne

Définition

On suppose ici $a < b$.

On appelle « valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ » le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx$$

Remarque : La valeur moyenne d'une fonction peut donc être nulle sur un intervalle sans que la fonction le soit. On considèrera, par exemple, la valeur moyenne de la fonction cube sur l'intervalle $\left[-2;2\right]$ ou celle des fonctions sinus et cosinus sur tout intervalle de longueur 2π.

Propriétés de l'intégrale

Dans cette partie, *a* et *b* sont deux réels et *f* et *g* sont deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ (si $a \le b$) ou sur l'intervalle $\left[b;a\right]$ (si $b \le a$).

Linéarité

Soit Soit *k* un réel quelconque.

On a alors :

$$\int_a^b \left(f+g\right)\left(x\right)dx = \int_a^b \left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_a^b g\left(x\right)dx$$

$$\int_a^b \left(kf\right)\left(x\right)dx = \int_a^b kf\left(x\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx$$

Remarque : on aurait pu exprimer la linéarité de l'intégrale en considérant deux réels *k* et *k'* quelconques et en écrivant :

$$\int_a^b \left(kf+k'g\right)\left(x\right)dx = \int_a^b \left(kf\left(x\right)+k'g\left(x\right)\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx + k'\int_a^b g\left(x\right)dx$$

Positivité

Si la fonction *f* prend des valeurs positives (respectivement négatives) sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ **alors** on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \geq 0$$

(respectivement $\int_a^b f\left(x\right)dx \leq 0$)

Ordre

Si, pour tout *x* de l'intervalle $\left[a;b\right]$, on a : $f\left(x\right) \leq g\left(x\right)$ **alors** :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \int_a^b g\left(x\right)dx$$

Relation de Chasles

Pour tout réel *c* compris entre *a* et *b*, on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx + \int_b^c f\left(x\right)dx = \int_a^c f\left(x\right)dx$$

Remarque : ici encore, l'analogie avec la relation du même nom pour les vecteurs est complète.

Inégalité de la moyenne

Si, pour tout *x* réel de l'intervalle $\left[a;b\right]$ ($a < b$), on a : $m \leq f\left(x\right) \leq M$ **alors** :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx \leq M$$

Si, pour tout *x* réel de l'intervalle $\left[a;b\right]$ ($a < b$), on a : $\left|f\left(x\right)\right| \leq M$ alors :

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \leq M$$

Intégrales et primitives

Théorème fondamental

Soit I un intervalle et soit a un élément de I.

Si f une fonction définie et continue sur I **alors** $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit I un intervalle et soit a et b deux éléments de I.

Si f une fonction définie et continue sur I et **si** F est l'<u>une</u> de ses primitives sur I **alors** :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

La différence $F(b) - F(a)$ est notée : $\left[F(x)\right]_a^b$.

Intégration par parties

Soit I un intervalle et soit a et b deux éléments de I.

Si f et g sont deux fonctions continues et dérivables sur I de dérivées continues sur I **alors** :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$