Fiche PanaMaths
Calculs avec les fonctions sous Xcas

Cette fiche destinée aux élèves des classes de Terminale requiert un premier niveau de connaissance du logiciel Xcas.

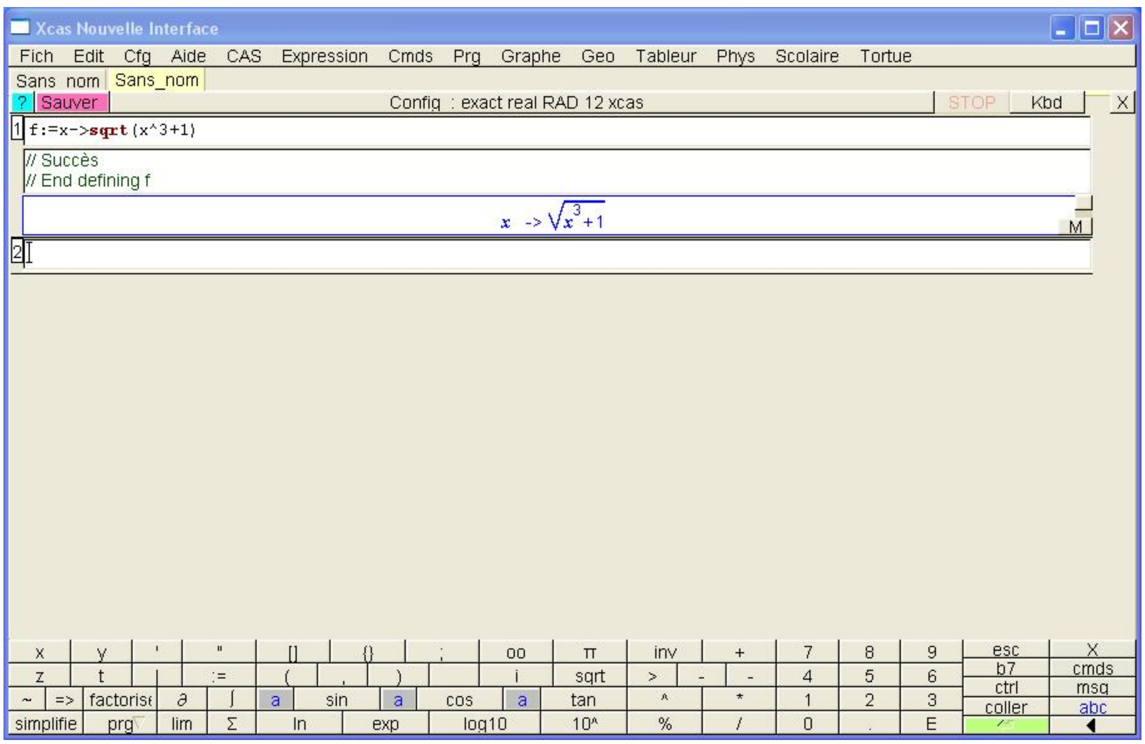
Définition d'une fonction

Fonction simple

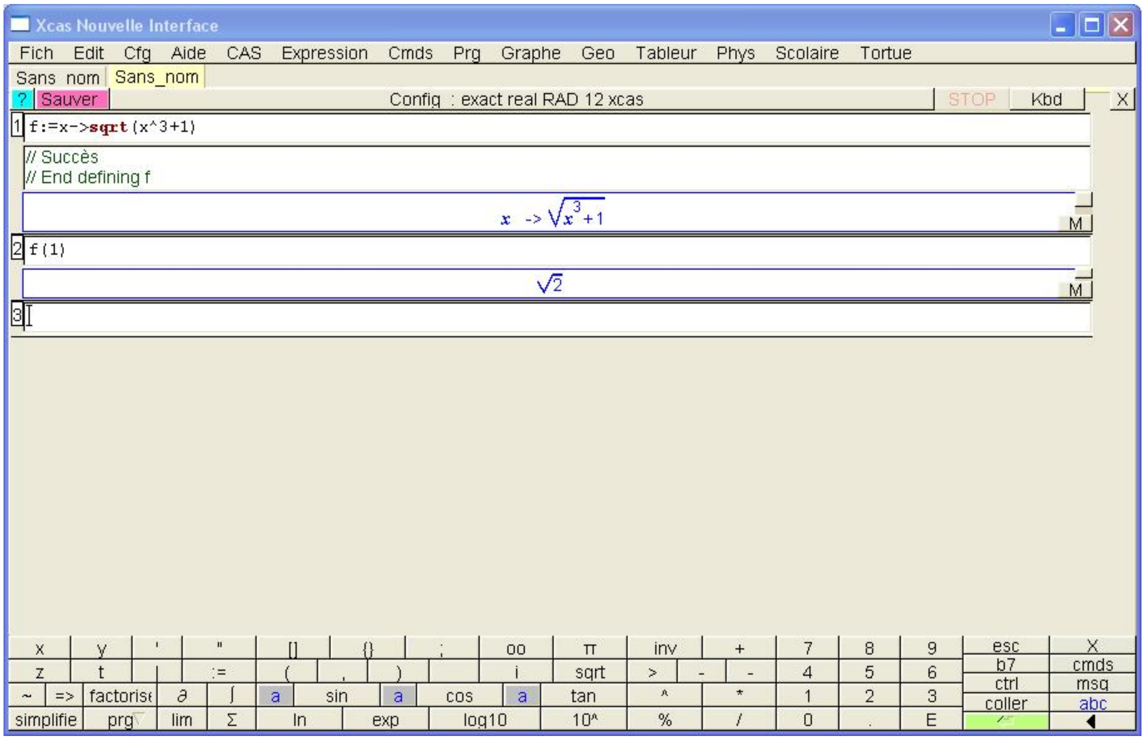
Si, par exemple, nous souhaitons définir sous Xcas la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3+1}$, nous allons utiliser l'une des syntaxes suivantes dans la ligne de commande :

`f:=x->sqrt(x^3+1)` ou `f(x):=sqrt(x^3+1)`

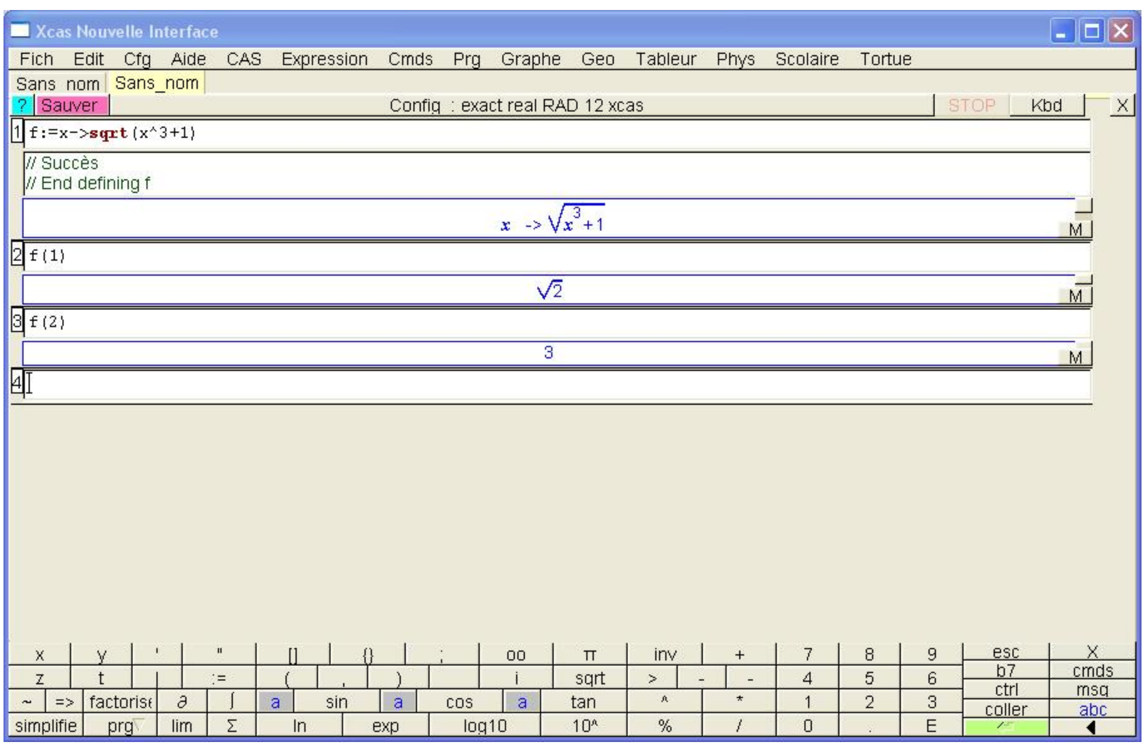
On valide alors cette saisie à l'aide de la touche « ENTREE » et on obtient la fenêtre suivante :



Dès lors, la fonction *f* peut être évaluée pour n'importe quelle valeur de son domaine de définition. Pour calculer $f(1)$, par exemple, on saisit simplement `f(1)` sur la deuxième ligne de commande et on valide à l'aide de la touche « ENTREE ». On obtient cette fois la fenêtre fournie page suivante.



Avec la commande `f(2)` saisie à la troisième ligne, on obtient directement la valeur 3 (la simplification $\sqrt{2^3+1}=\sqrt{9}=3$ est effectuée automatiquement).

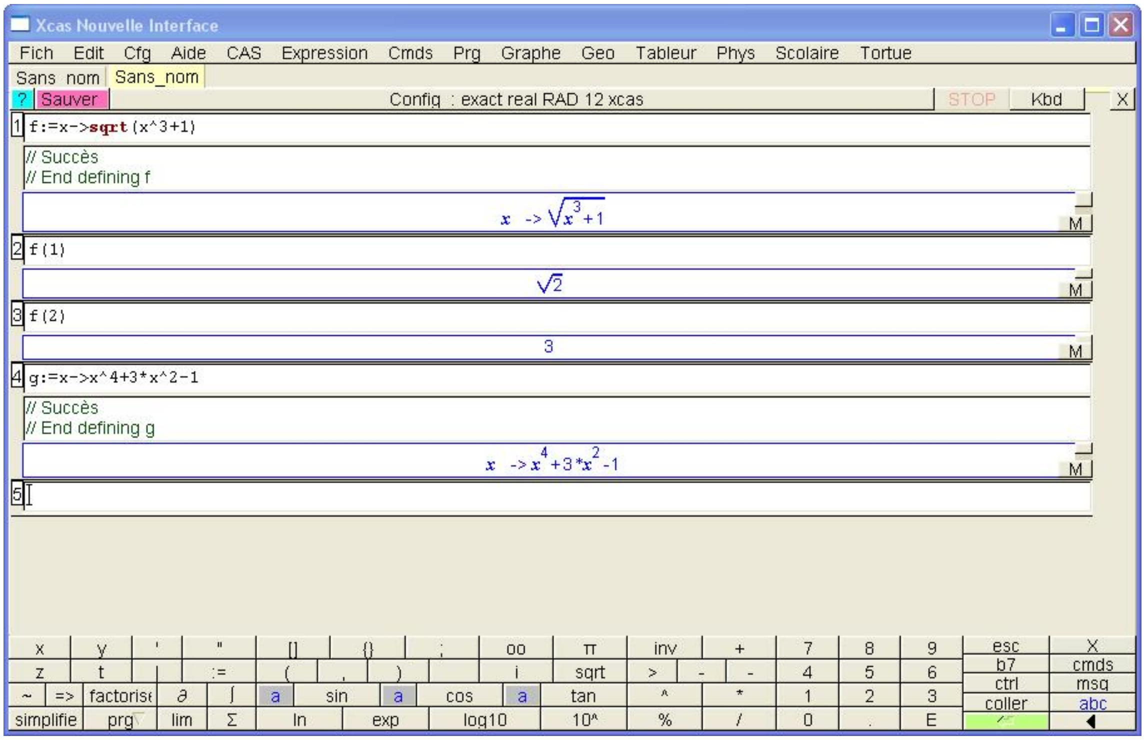


Vers des fonctions… moins simples !

Considérons maintenant la fonction $g : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 1$ que nous définissons grâce à la 4ème ligne de commande :

```
g:=x->x^4+3*x^2-1
```

Après avoir validé avec la touche « ENTREE », on obtient :



Pour définir la fonction $h = g \circ f$, on utilise le symbole @ en saisissant :

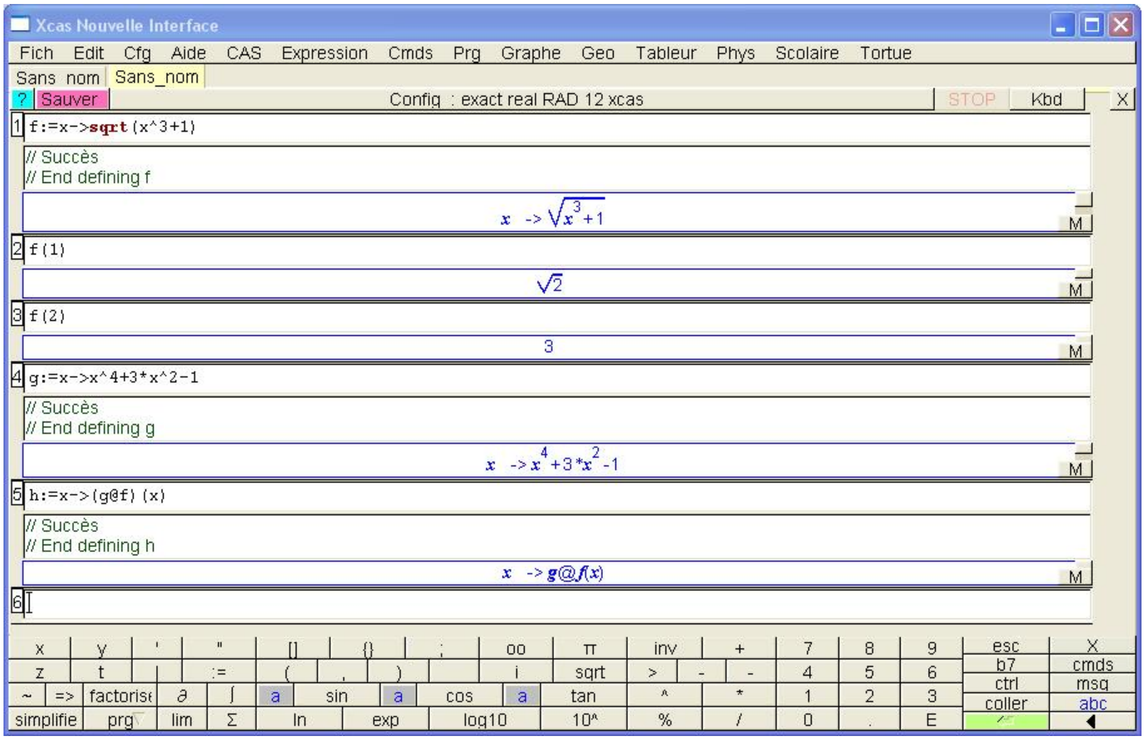
```
h:=x->(g@f)(x)
```

Comme on le constatera page suivante (capture d'écran en haut de la page), cette commande ne nous donne pas l'expression simplifiée de $(g \circ f)(x)$. Cette dernière sera obtenue en utilisant la commande « simplifier » (deuxième capture d'écran page suivante) :

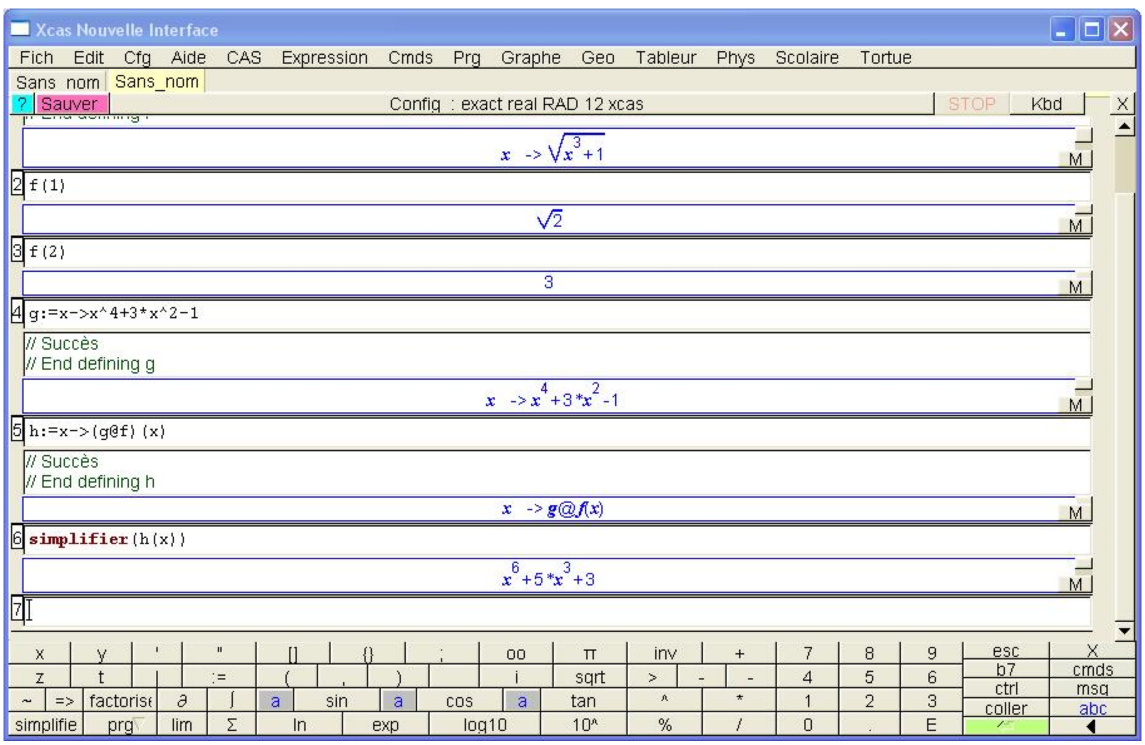
```
simplifier(h(x))
```

Bien sûr, on aurait pu ne pas définir la fonction *h* et, souhaitant seulement connaître l'expression simplifiée de $(g \circ f)(x)$, saisir la commande :

```
simplifier((g@f)(x))
```



On obtient ensuite l'expression simplifiée de $(g \circ f)(x)$:



La fonction *h* étant définie, on peut bien sûr l'évaluer pour toute valeur de son domaine de définition qui est ici celui de la fonction *f*, c'est-à-dire $[-1;+\infty[$. Ce n'est pas parce que l'expression simplifiée de $(g \circ f)(x)$ est polynômiale que Xcas « oublie » que la fonction *f* n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, on pourra, par exemple, évaluer $h(-4)$ …

Notons enfin que l'on peut composer plus de deux fonctions …

Comme cas particulier, on peut composer une fonction par elle-même plusieurs fois. On utilise alors le symbole @@ suivi du nombre de fois où on compose la fonction. Par exemple, si on souhaite définir $u = f \circ f \circ f \circ f$, on pourra écrire :

```
u:=x->(f@@4)(x)
```

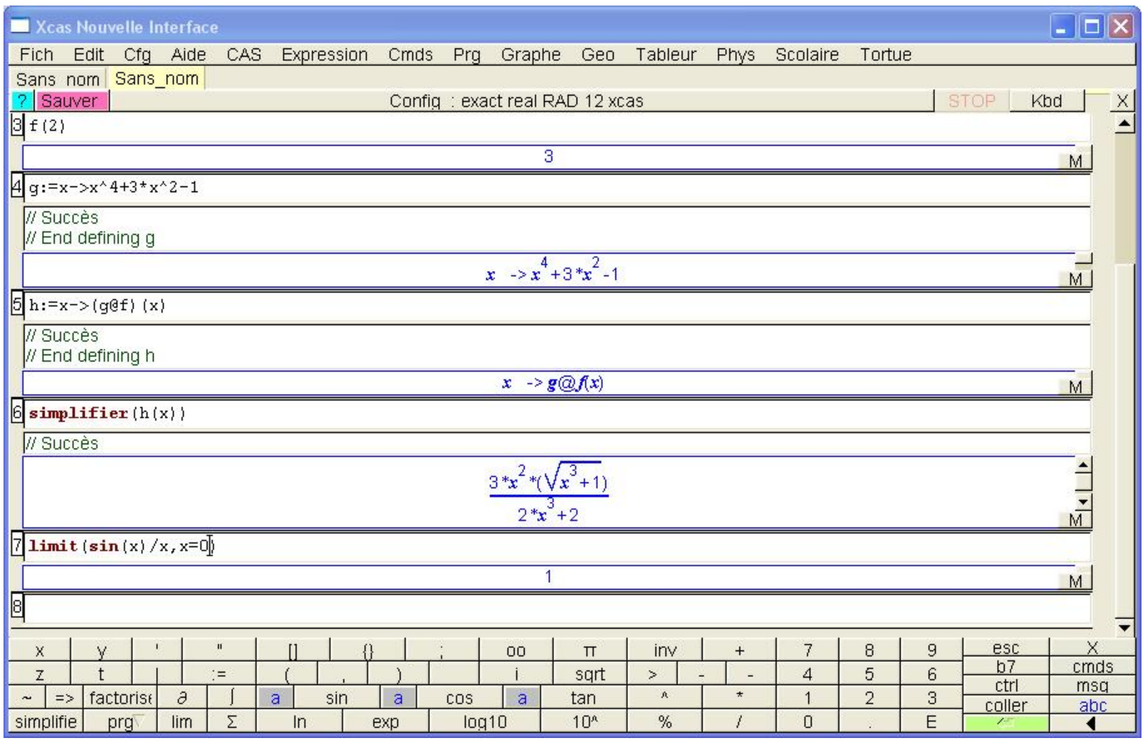
Limite

Que l'on cherche une limite en un point (i.e. en un réel) ou en $\pm\infty$, la syntaxe de la commande reste la même. On utilise la commande « `limit` » ou la commande « `limite` » indifféremment.

Par exemple, si on s'intéresse à la limite de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en 0, on saisira :

```
limit(sin(x)/x,x=0)
```

Après avoir validé la commande à l'aide de la touche « ENTREE », Xcas nous renvoie la valeur : 1 (cf. la capture d'écran ci-dessous).



On peut aussi s'intéresser à la limite à gauche ou à la limite à droite en un point.

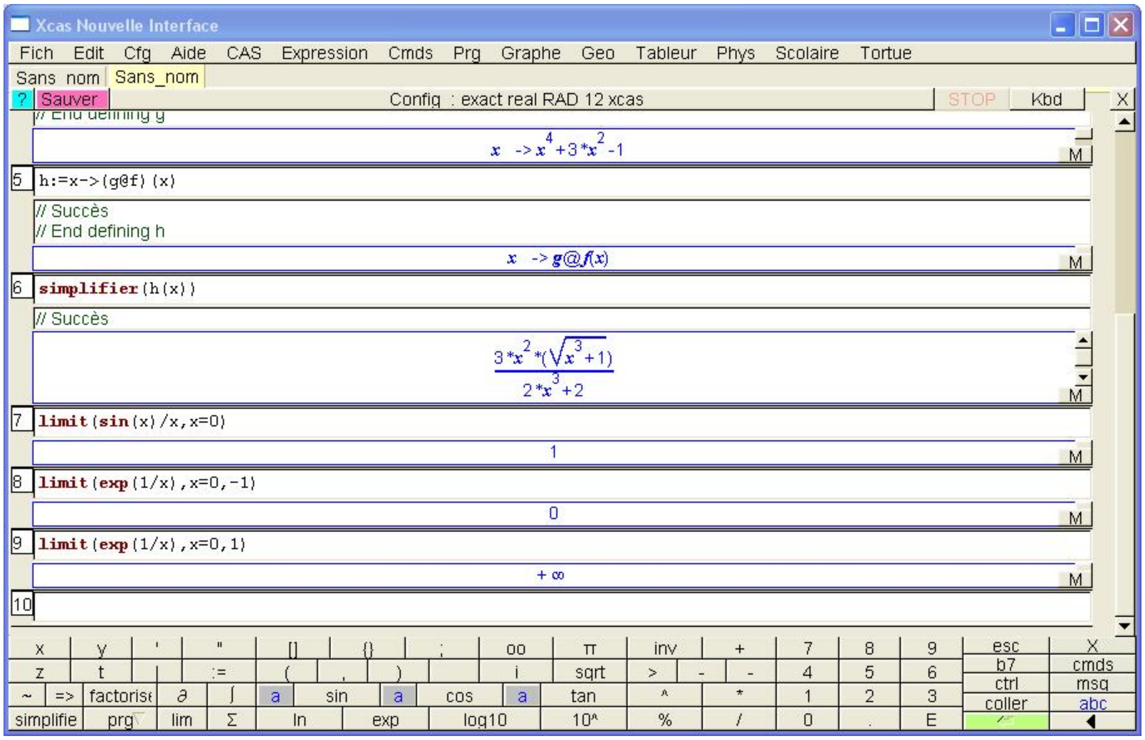
Par exemple, pour la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ on saisira, pour la limite à gauche (on fait apparaître -1 comme troisième argument) :

```
limit(exp(1/x),x=0,-1)
```

et, pour la limite à droite (on fait cette fois apparaître 1 comme troisième argument) :

```
limit(exp(1/x),x=0,1)
```

Xcas nous renvoie respectivement les valeurs 0 et $+\infty$.



On peut également être amené à calculer des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$. Comme nous l'avons mentionné au début de cette partie, on conservera la syntaxe mais on travaillera avec « `x=+infinity` » (ATTENTION le « + » est obligatoire !) et « `x=-infinity` » respectivement.

Par exemple pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x+8}{6x^3-156}$, on saisira :

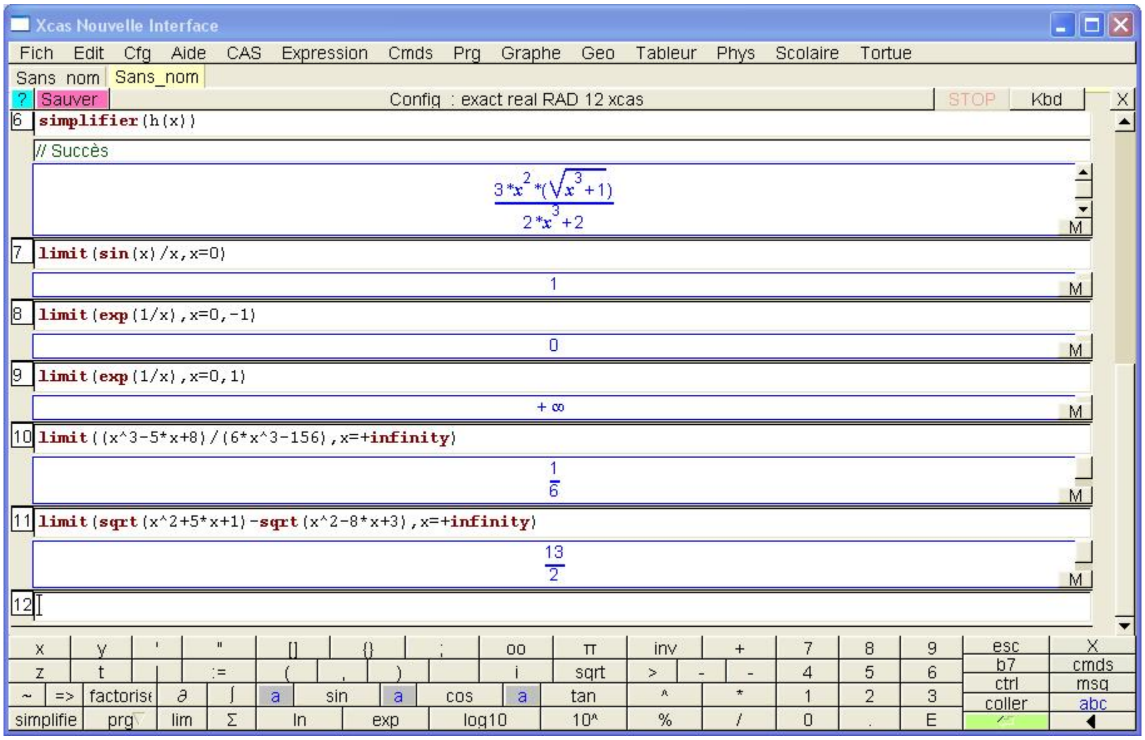
```
limit((x^3-5*x+8)/(6*x^3-156),x=+infinity)
```

Après avoir validé la commande à l'aide de la touche « ENTREE », Xcas nous renvoie la valeur : $\dfrac{1}{6}$ (cf. la capture d'écran page suivante).

Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-8x+3}\right)$, on saisira :

```
limit(sqrt(x^2+5*x+1)-sqrt(x^2-8*x+3),x=+infinity)
```

Après avoir validé la commande à l'aide de la touche « ENTREE », Xcas nous renvoie la valeur : $\dfrac{13}{2}$ (cf. la capture d'écran page suivante).



Dérivation

Taux d'accroissement

Si on considère une fonction f définie sur un intervalle I et si l'on dispose de a et b dans I avec $a \neq b$, le taux d'accroissement de f entre a et b est égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

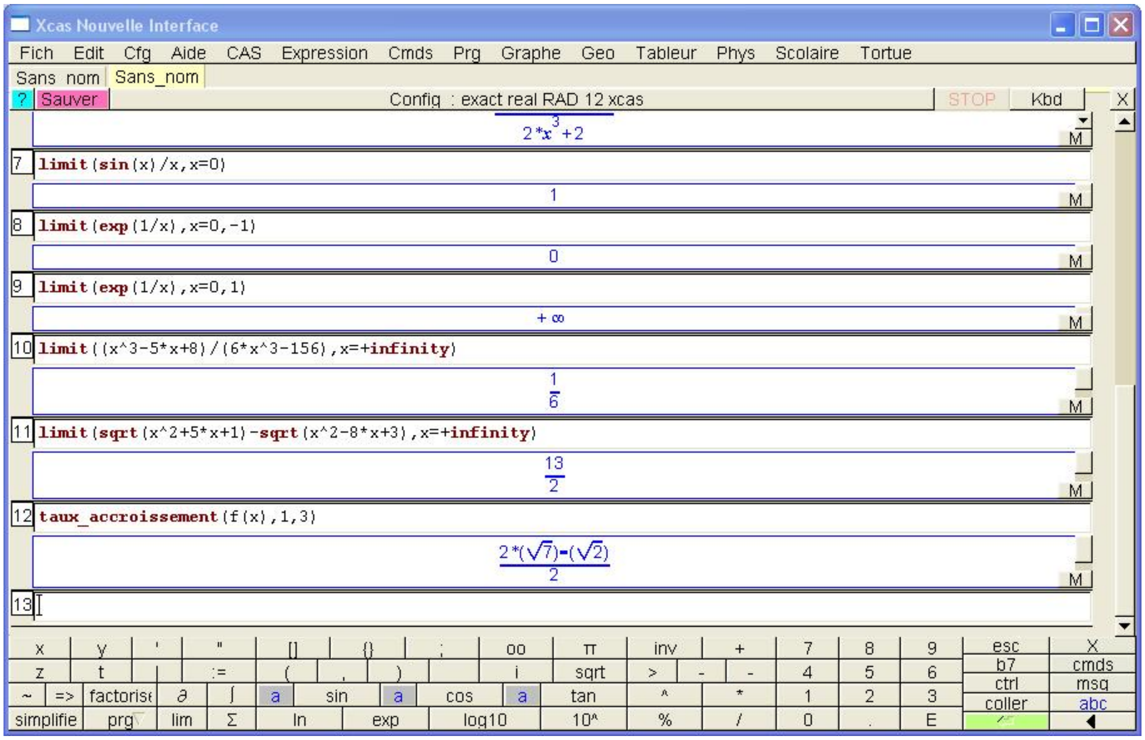
Avec la fonction f considérée au début de ce document, le taux d'accroissement entre 1 et 3 vaut :

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\sqrt{3^3+1}-\sqrt{1^3+1}}{2}=\frac{\sqrt{28}-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2}$$

On l'obtient sous Xcas en saisissant :

```
taux_accroissement(f(x),1,3)
```

Après avoir validé la commande à l'aide de la touche « ENTREE », Xcas nous renvoie directement la valeur : $\dfrac{2\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2}$ (cf. la capture d'écran ci-après).



Nombre dérivé

Le nombre dérivé d'une fonction en un point (lorsque cette fonction est dérivable en ce point bien sûr …) étant la limite du taux d'accroissement entre ce point et un point proche, on va utiliser la commande « `limit` » pour l'obtenir.

Par exemple, pour calculer le nombre dérivé de la fonction *f* défini au début de ce document au point 2, on saisira :

```
limit(taux_accroissement(f(x),2,2+u),u=0)
```

Remarque : nous avons utilisé la variable « *u* » pour le calcul de la limite du taux d'accroissement car la variable « *h* » est déjà utilisée dans notre session courante et désigne en fait une fonction !

La commande ci-dessus correspond au calcul de : $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(2+u)-f(2)}{u}$.

On a, pour tout réel *u* non nul :

$$\frac{f(2+u)-f(2)}{u}=\frac{\sqrt{(2+u)^3+1}-3}{u}=\frac{\sqrt{(2+u)^3+1}-\sqrt{9}}{u}=\frac{(2+u)^3+1-9}{u\left(\sqrt{(2+u)^3+1}+\sqrt{9}\right)}.$$

Pour le numérateur :

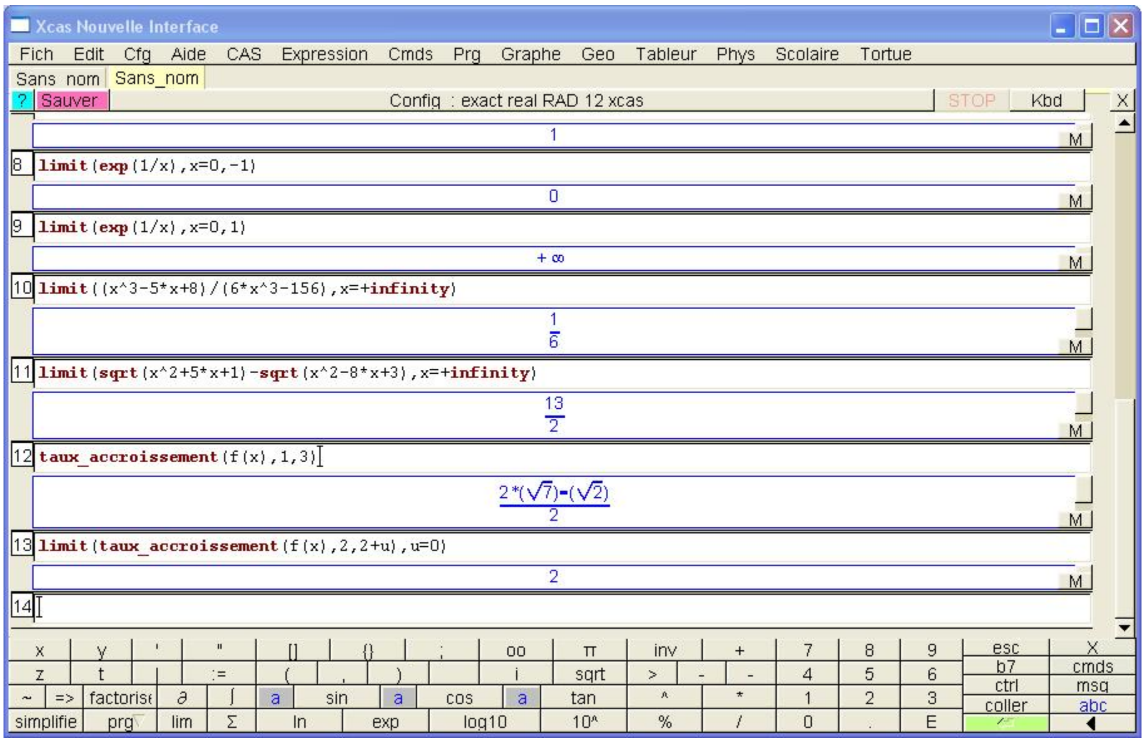
$$(2+u)^3+1-9=\cancel{2^3}+3\times 2^2\times u+3\times 2\times u^2+u^3\cancel{-8}=u^3+6u^2+12u=u\left(u^2+6u+12\right)$$

D'où : $\frac{f(2+u)-f(2)}{u}=\frac{(2+u)^3+1-9}{u\left(\sqrt{(2+u)^3+1}+\sqrt{9}\right)}=\frac{u^2+6u+12}{\sqrt{(2+u)^3+1}+3}$.

On a facilement : $\lim_{u\to 0}\left(u^2+6u+12\right)=12$.

Puis : $\lim_{u\to 0}(2+u)=2$ d'où $\lim_{u\to 0}\left[(2+u)^3+1\right]=2^3+1=9$. Alors : $\lim_{u\to 0}\sqrt{(2+u)^3+1}=\sqrt{9}=3$.

Finalement : $\lim_{u\to 0}\frac{f(2+u)-f(2)}{u}=\frac{12}{3+3}=2$.

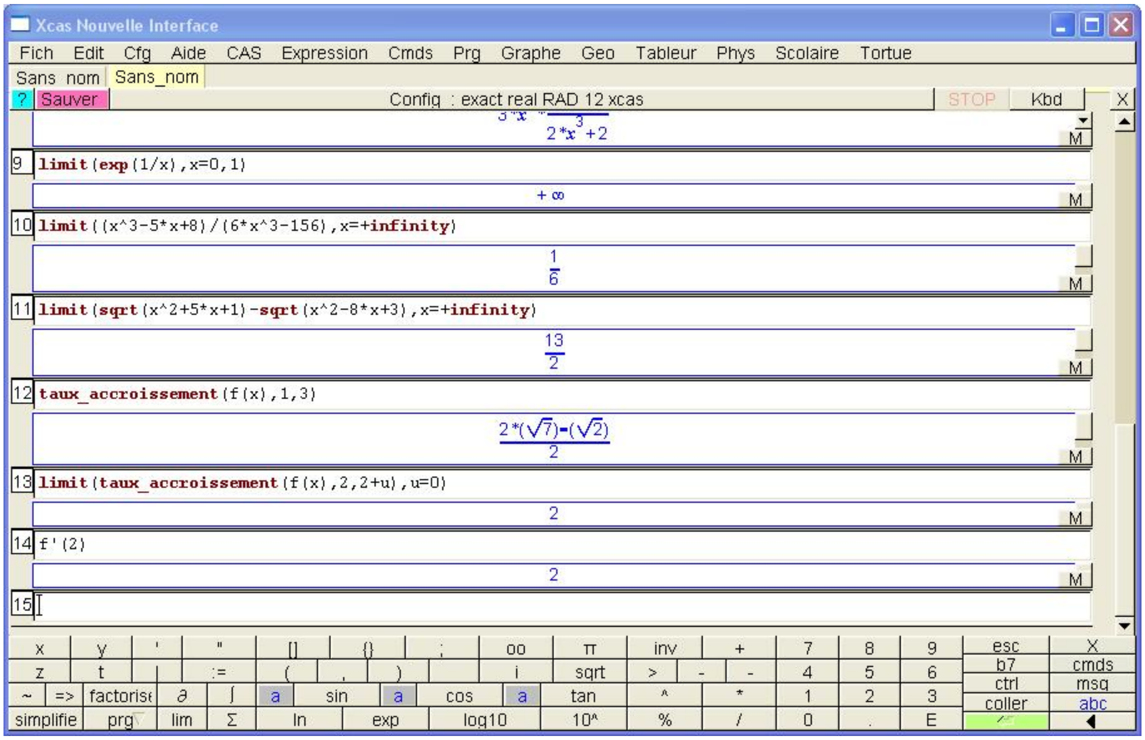


Fonction dérivée

Par défaut, le nom de la dérivée d'une fonction (supposée dérivable … ☺) est classiquement le nom de la fonction complété d'un prime. Par exemple, si l'on souhaite directement obtenir $f'(2)$, il suffit de saisir dans la ligne de commande (cf. page suivante) :

```
f'(2)
```

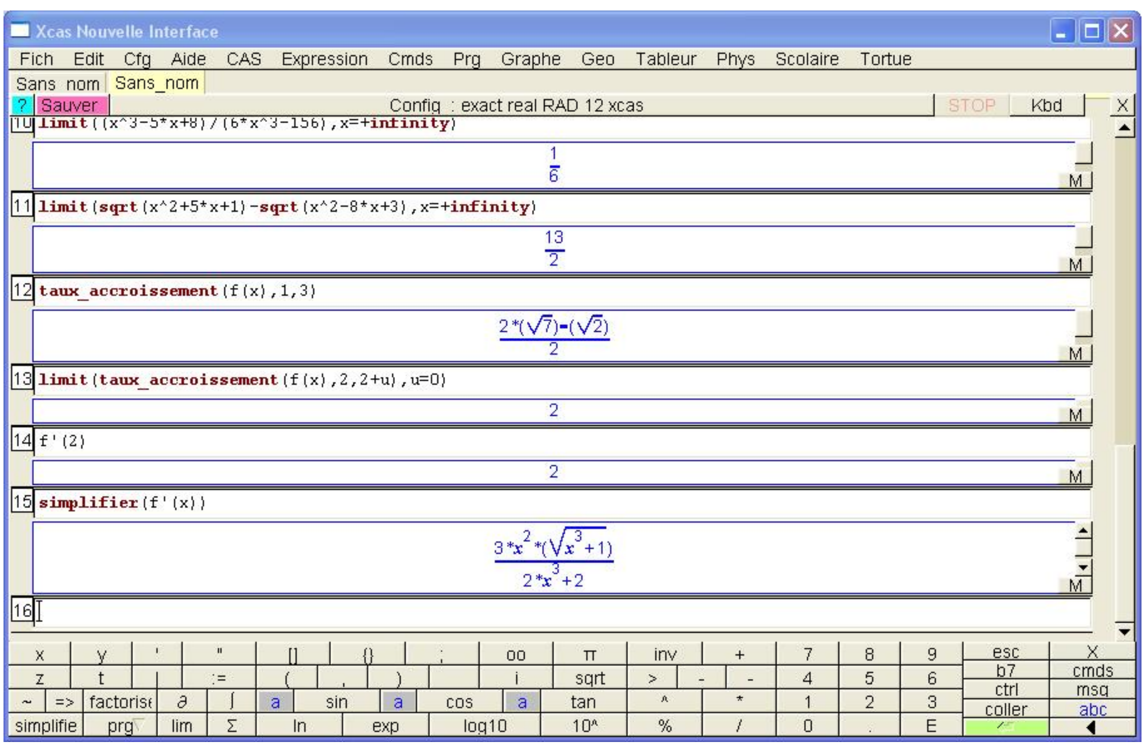
Bien sûr, après validation, Xcas nous renvoie la valeur 2 déjà obtenue précédemment.



La fonction dérivée est donc nommée « `f'` » par défaut et utilisable en tant que telle. Si l'on souhaite l'expression simplifiée de $f'(x)$, il suffit de saisir la commande :

```
simplifier(f'(x))
```

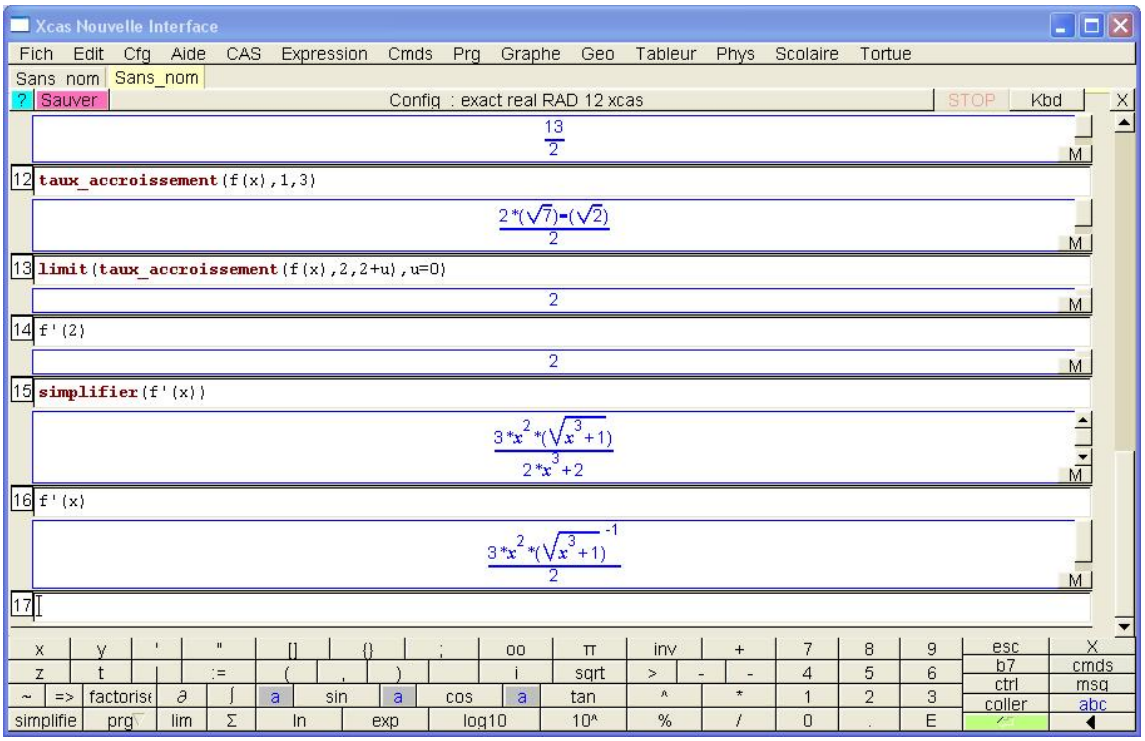
Après validation, on obtient :



A partir de notre fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3+1} = \left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}$, un calcul simple nous donne :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 3x^2 \times \left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$$

Cette expression diffère de celle fournie par Xcas. La raison en est la suivante : nous avons en fait demandé une expression *simplifiée* de $f'(x)$. Sans utiliser la commande « `simplifier` », c'est-à-dire en entrant seulement « `f'(x)` » au niveau de la ligne de commande, on retrouve une expression très proche du résultat de notre calcul :



Pour Xcas, simplifier l'expression de « `f'(x)` » consiste à se débarrasser de la racine carrée du dénominateur.

Si l'on a besoin de donner un autre nom à la fonction dérivée de la fonction *f*, par exemple, on peut procéder de diverses façons. Supposons que l'on souhaite appeler *s* la fonction dérivée de la fonction *f*. Sous Xcas, on pourra définir la fonction *s* de la façon suivante (liste non exhaustive) :

```
s:=f'                    ou g:=x->f'(x)
s:=diff(f)               ou g:=x->diff(f)(x)
s:=function_diff(f)      ou s:=x->function_diff(f)(x)
s:=fonction_derivee(f)   ou s:=x->fonction_derivee(f)(x)
```

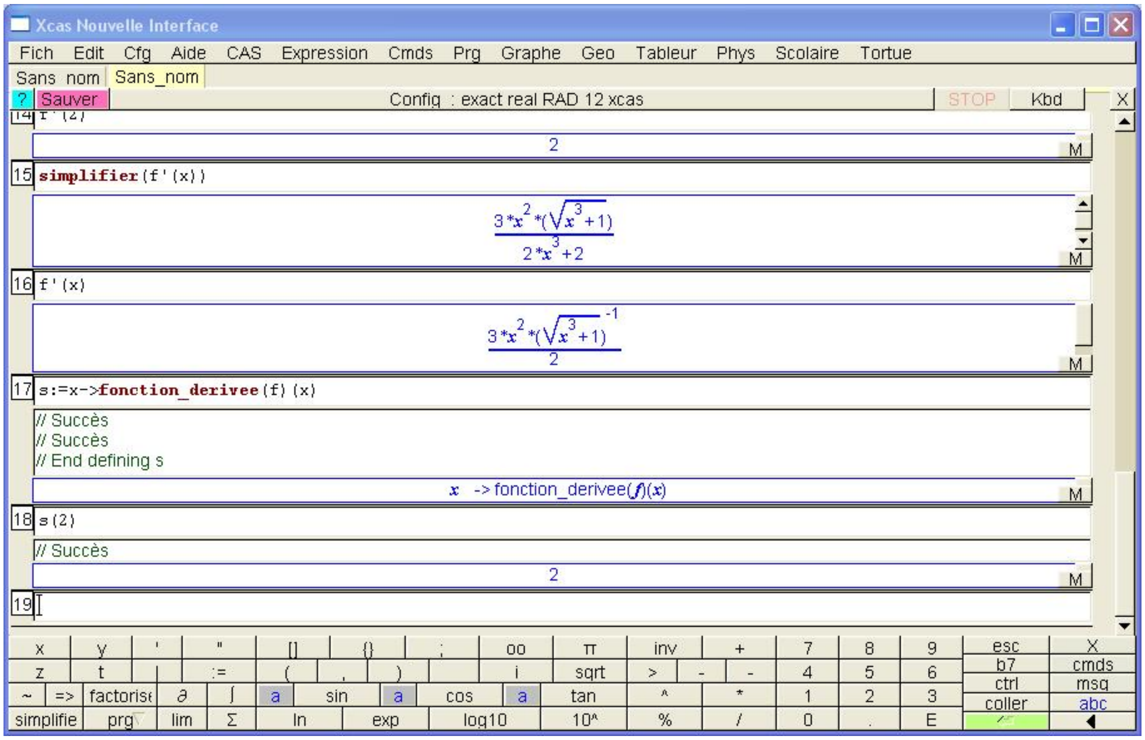
Bien sûr, on peut reprendre ces définitions en faisant apparaître l'argument « `x` ». Par exemple avec « `diff` », on pourra écrire :

```
s(x):=diff(f)(x)
```

Sous Xcas, nous avons successivement saisi et validé les commandes (voir ci-dessous) :

```
s :=x->fonction_derivee(f)(x)
s(2)
```

Nous retrouvons, une fois encore, la valeur 2.



Intégration

Primitive

On utilisera l'une des trois commandes équivalentes : « `int` » ou « `integrate` » ou « `integration` ».

On peut les utiliser de deux façons différentes :

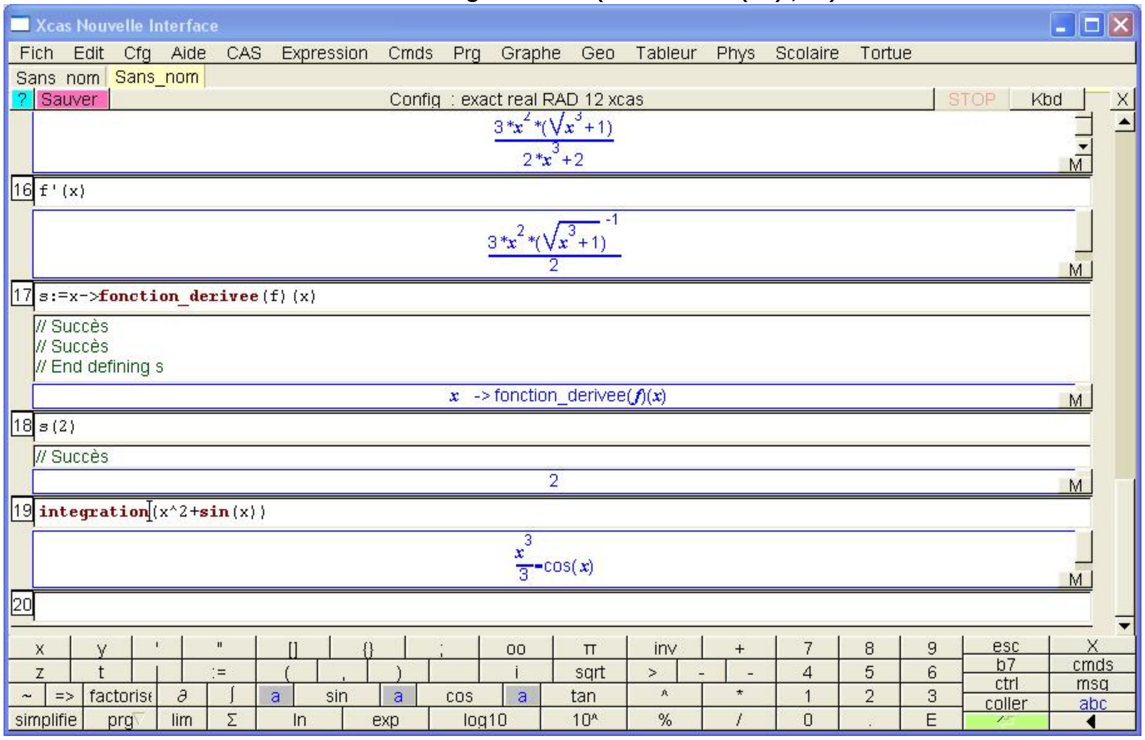
- Soit en leur fournissant comme argument une expression.
  Par exemple, pour obtenir une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 + \sin(x)$, on peut saisir et valider la commande :

  ```
  integration(x^2+sin(x))
  ```

  Dans ce cas (voir page suivante), le résultat obtenu est également une expression.

  Remarque : on peut aussi être amené à préciser la variable d'intégration :

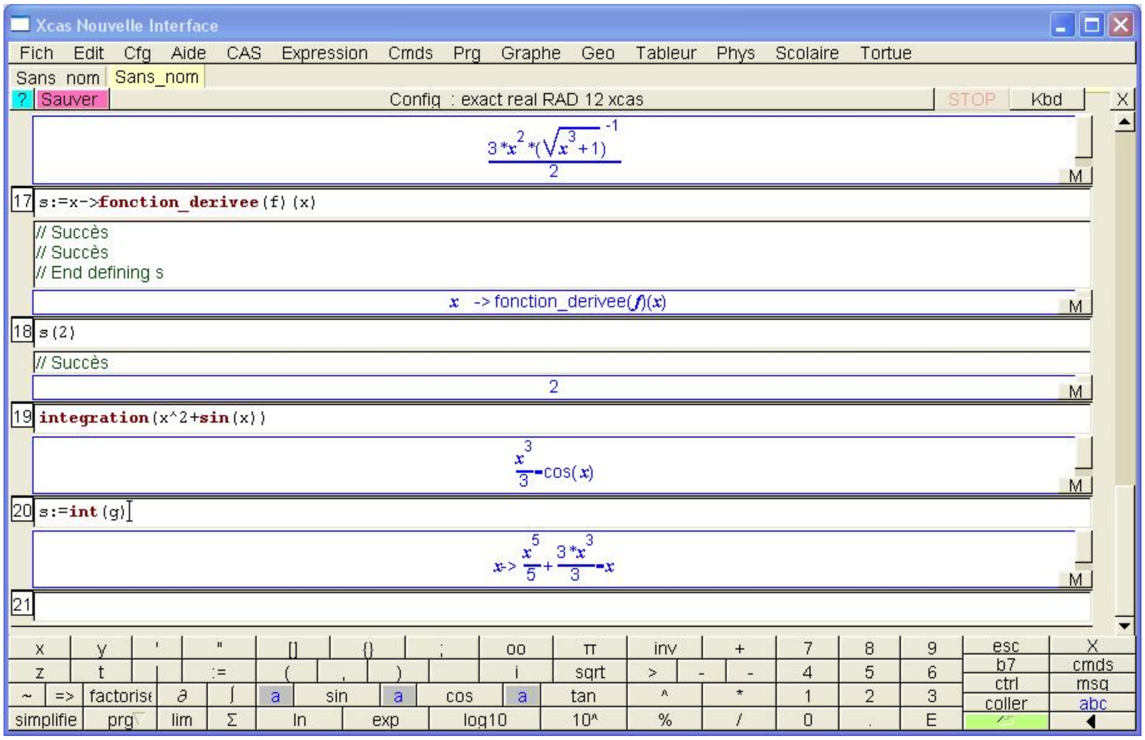
```
integration(x^2+sin(x),x)
```



- Soit en leur fournissant comme argument une fonction.
  Par exemple, dans notre session, nous avons défini la fonction $g : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 1$.
  On peut alors considérer la fonction *s* comme primitive de la fonction g.

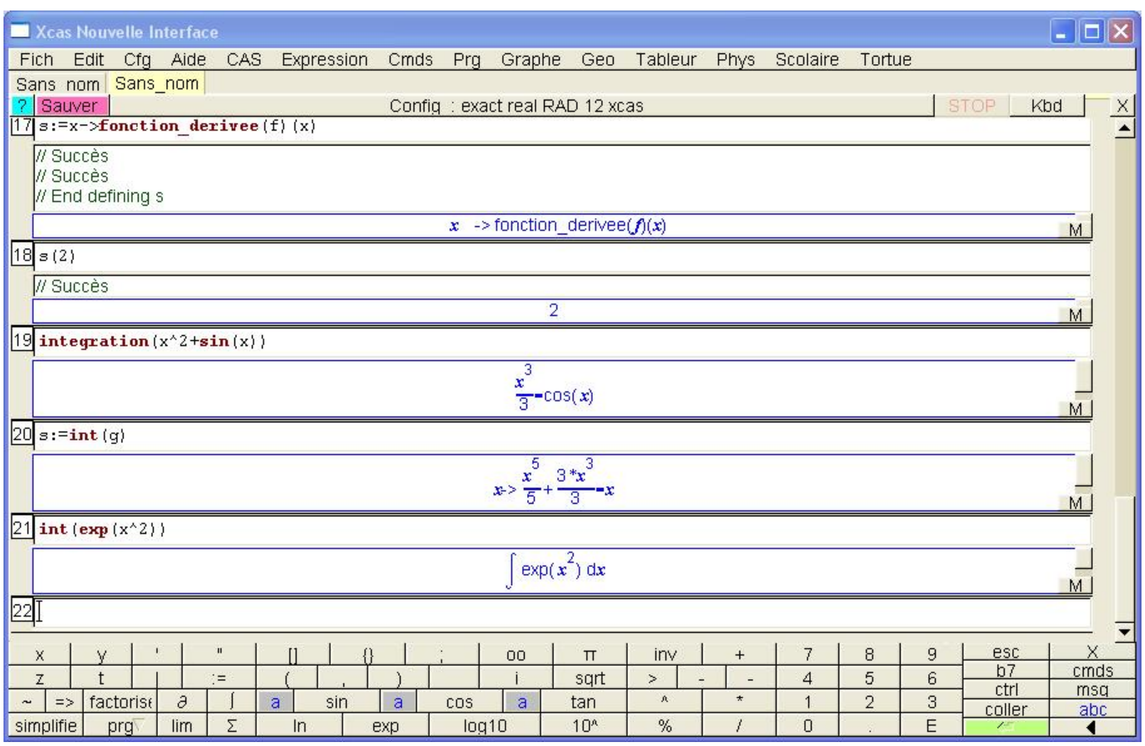
  Sous Xcas, on pourra saisir la commande :

```
s:=int(g)
```



On constate alors que Xcas ne simplifie pas nécessairement toutes les expressions … Même en essayant d'utiliser la commande « `simplifier(s(x))` » ensuite, le résultat n'est pas très probant …

Pour terminer cette partie, arrêtons-nous un instant à la réponse fournie par Xcas lorsque les primitives d'une fonction ne s'expriment pas à l'aide de fonctions connues. Par exemple, pour la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, on saisit « `int(exp(x^2))` » et on obtient :



La notation $\int e^{x^2}dx$ désigne classiquement l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ sur l'intervalle d'intégration considéré.

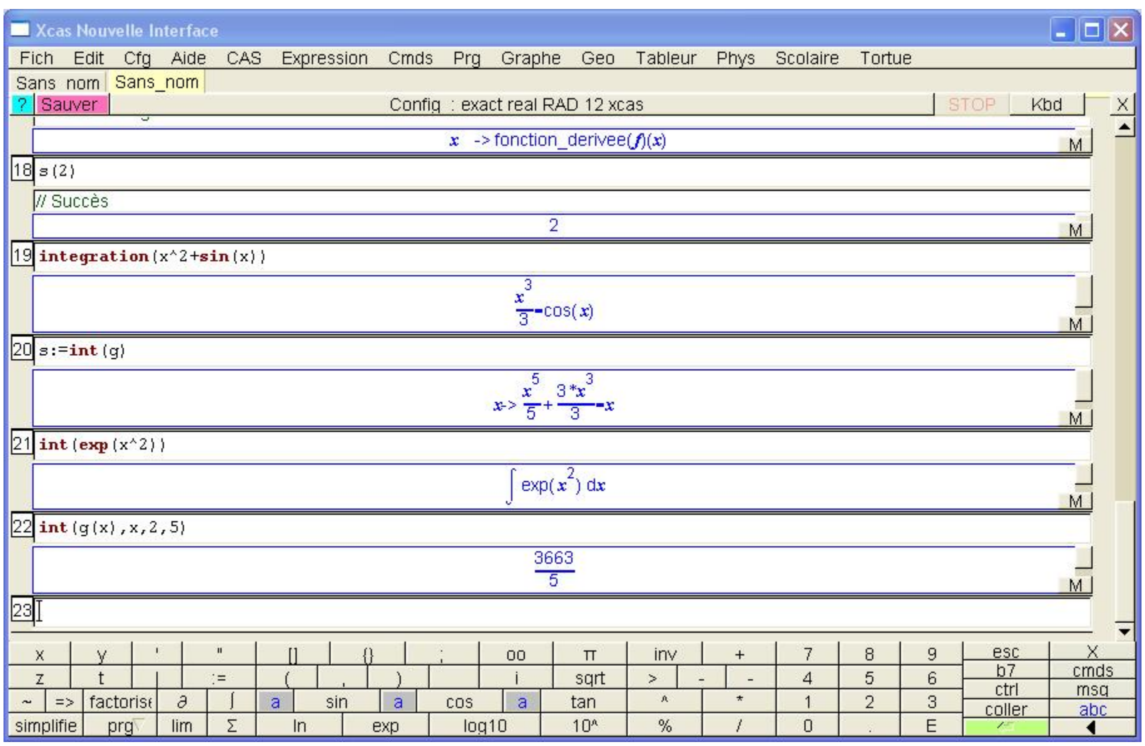
Intégrale

On utilise les mêmes commandes que pour le calcul de primitives mais on doit cette fois préciser quatre arguments.

Par exemple, pour calculer $\int_2^5 g(x)dx$ (g est la fonction définie dans notre session Xcas), on saisira et validera la commande :

```
int(g(x),x,2,5)
```

Xcas nous renvoie la fraction irréductible : $\dfrac{3\,663}{5}$ (voir page suivante).



Remarque : le deuxième argument est OBLIGATOIRE !

Pour finir, on peut calculer des intégrales sur des intervalles de longueur infinie.

Par exemple, avec la densité de la loi normale centrée réduite, on a le résultat classique :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

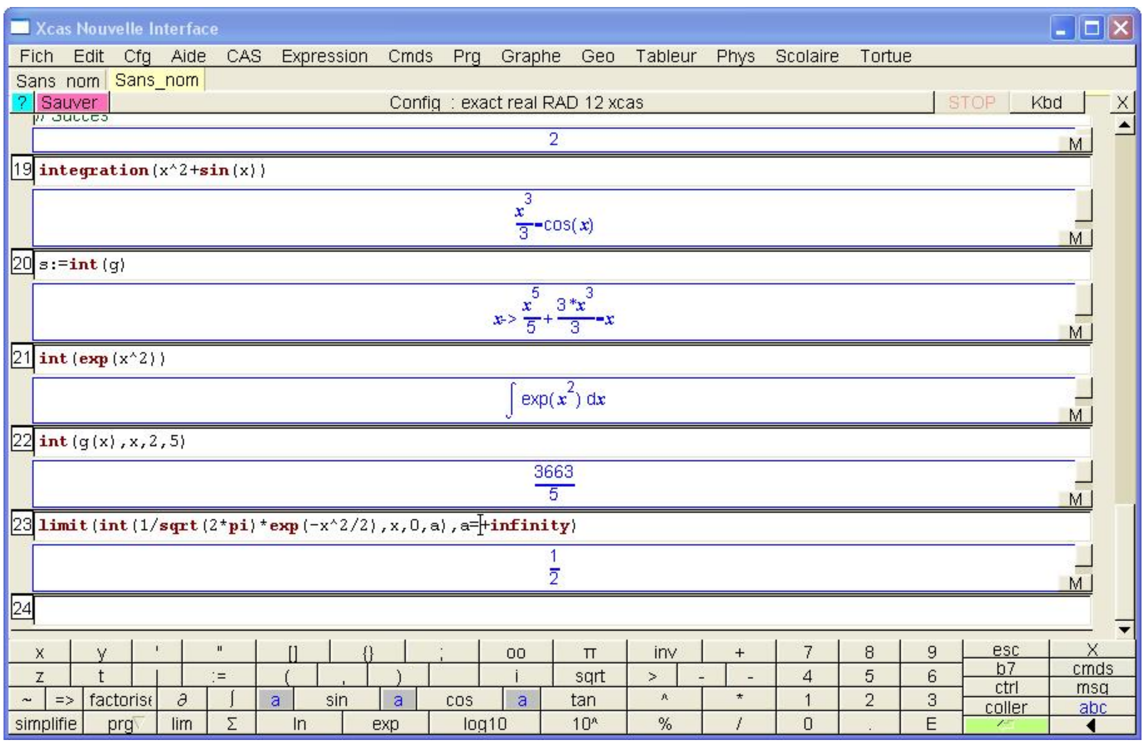
Rappelons que l'écriture $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ correspond à : $\lim_{a \to +\infty} \int_0^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Ainsi, pour retrouver le résultat précédent avec Xcas, on saisit et valide la commande (voir page suivante) :

```
limit(int(1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),x,0,a),a=+infinity)
```

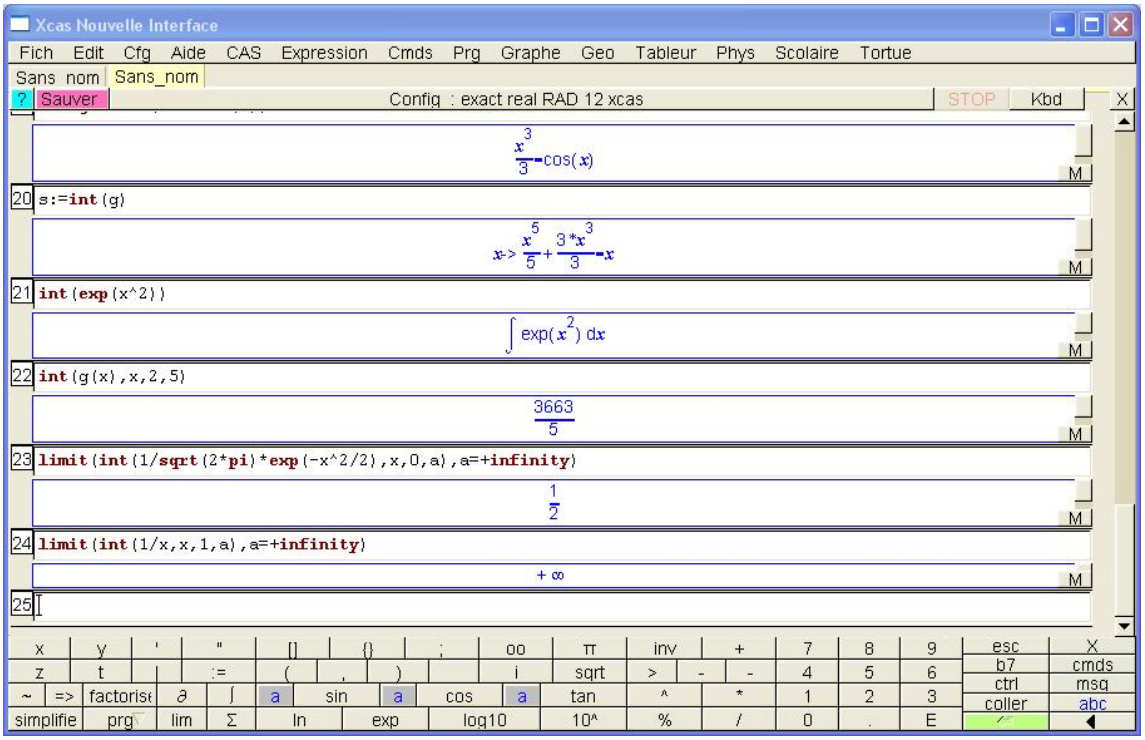
On notera qu'une intégrale de ce type peut prendre une valeur infinie.

Par exemple : $\lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to +\infty} \ln a = +\infty$.

Xcas sait traiter ce genre de situation …



Et avec la fonction inverse :


Xcas Nouvelle Interface
Fich Edit Cfg Aide CAS Expression Cmds Prg Graphe Geo Tableur Phys Scolaire Tortue
Sans_nom Sans_nom
? Sauver Config : exact real RAD 12 xcas STOP Kbd
x^3/3-cos(x)
20 s:=int(g)
x-> x^5/5+3*x^3/3-x
21 int(exp(x^2))
∫ exp(x^2) dx
22 int(g(x),x,2,5)
3663/5
23 limit(int(1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),x,0,a),a=+infinity)
1/2
24 limit(int(1/x,x,1,a),a=+infinity)
+ ∞
25