

Fiche PanaMaths

Limite de fonction (TS)

On s'intéresse à une fonction f et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

f admet :	Limite finie L	Limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$)	Pas de limite
En $\pm\infty$	<p style="text-align: center;">Asymptote horizontale (d) d'équation $y = L$</p> <p>On étudie la position de \mathcal{C}_f par rapport à (d) en étudiant le signe de $f(x) - L$.</p>	<p>Il se peut qu'il y ait une asymptote oblique (notion hors programme) C'est le cas si on a :</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \text{(ou } x \rightarrow +\infty)}} [f(x) - (ax + b)] = 0$ <p>Dans ce cas, la courbe \mathcal{C}_f admet en $-\infty$ (respectivement $+\infty$) la droite (d) d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique. On étudie la position de \mathcal{C}_f par rapport à (d) en étudiant le signe de $f(x) - (ax + b)$.</p>	<p>Exemples : $x \mapsto \sin x$ $x \mapsto \cos x$ (ces deux fonctions sont bornées) $x \mapsto x^2 \sin x / x \mapsto x^2 \cos x$ $x \mapsto e^x \sin x / x \mapsto e^x \cos x$ (ces quatre fonctions ne sont pas bornées)</p>
En $a \in \mathbb{R}$	<p style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Si la fonction est définie en a</p> <p>La limite à gauche peut ne pas être égale à la limite à droite : $x \mapsto E(x)$</p> <p>Quand : $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = f(a)$ on dit que f est continue en a. ($x \mapsto E(x)$ est continue à droite en tout $k \in \mathbb{Z}$)</p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Si la fonction n'est pas définie en a</p> <p>La limite peut être finie seulement à gauche ou à droite :</p> $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{1/x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{1/x} = +\infty$ <p>Si $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = L$, on peut prolonger f par continuité en a en lui donnant la valeur L en ce point.</p>	<p>La fonction f n'est pas définie en a et sa courbe représentative admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.</p> <p>Exemples :</p> $x \mapsto \frac{1}{x} / x \mapsto \frac{1}{x} / x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ en } 0$ $x \mapsto \tan x \text{ en tout point } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ <p>(la limite infinie peut n'exister qu'à gauche ou à droite et, s'il en existe des deux côtés, elles peuvent être égales ou opposées)</p>	<p>Exemple : $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ en 0</p>