Fiche PanaMaths (Terminale ES)
→ Exponentielle de base *a*

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

→ Les règles de calcul sur les puissances d'exposants entiers ;
→ La fonction exponentielle.

Ce que vous devez retenir

1. La <u>définition</u> de a^b avec *a* réel strictement positif et *b* réel :

$$\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$$

2. Les <u>conséquences immédiates de la définition</u> précédente :
   Pour tout *a* réel strictement positif et tout *b* réel, on a :

   - $a^b > 0$;
   - $\ln a^b = b \ln a$.

3. Les <u>propriétés algébriques</u> suivantes :
   - Pour tout réel *a* strictement positif et tous réels *b* et *b'* :

$$a^b \times a^{b'} = a^{b+b'} \qquad \left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$$

   - Pour tous réels *a* et *a'* strictement positifs et tout réel *b* :

$$a^b \times a'^b = (aa')^b \qquad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

4. La <u>définition de la racine *n*ième</u> d'une nombre réel positif :
   La racine *n*ième (*n* entier naturel non nul) du nombre réel positif *a* est l'unique réel positif *b* dont la puissance *n*ième est égale à *a* (soit $b^n = a$).
   On a :

$$\boxed{b = a^{\frac{1}{n}}}$$

   → La racine *n*ième du nombre réel positif *a* peut également être notée : $\sqrt[n]{a}$;
   → Pour tout entier naturel non nul *n*, on a : $\sqrt[n]{0} = 0$.

   Un exemple simple : la racine quatrième de 625 vaut 5 car $5^4 = 625$.

5. La notion de moyenne géométrique de n nombres positifs :
   On considère a_1, a_2, …, a_n n réels positifs.
   La moyenne géométrique α_g de ces n réels est la racine $n$ième de leur produit :

$$\boxed{\alpha_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$$

6. La définition de la fonction exponentielle de base a ($a > 0$) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto a^x$$

   On a : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

   On doit alors distinguer (et maîtriser !) les trois situations suivantes :
   - $a = 1$
     La fonction f est alors constante et prend la valeur 1 sur $\mathbb{R}$.
   - $a > 1$
     La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :
     $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
   - $a < 1$
     La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a :
     $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

   Remarques :
   - Dans tous les cas, on note que l'on a : $f(0) = 1$; les courbes représentatives des fonctions exponentielles de base a passent donc toutes par le point de coordonnées $(0;1)$;
   - Avec $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle. Celle-ci est donc, rigoureusement, la fonction exponentielle de base e.

Ce que vous devez savoir faire

1. D'abord, et c'est essentiel, vous devez savoir vous servir de votre calculatrice !
   Vous devez être capable de saisir un calcul comme $12{,}6934^{3{,}59}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-1}, 10^{-2} ou toute autre précision demandée ou requise (avec le nombre ci-dessus, on obtient respectivement $9158{,}9$ et $9158{,}93$).
2. Vous devez maîtriser les deux écritures a^b et $e^{b \ln a}$: parfois la première sera plus intéressante, parfois ce sera la seconde …
3. Vous devez savoir extraire (à la calculatrice) la racine $n$ième d'un nombre. Comme cas particulier vous devez savoir déterminer la moyenne géométrique de n nombres positifs (par exemple avec l'objectif de déterminer un taux de croissance moyen …).
4. Vous devez savoir étudier une fonction qui comporte une fonction exponentielle.

Ce à quoi vous devez faire particulièrement attention !

- La notation a^b avec b réel n'a de sens dans le cas général que pour $a > 0$! Mais dans le cas particulier où b est un entier, a peut être négatif : $(-4,5)^{-2} = \frac{1}{(-4,5)^2} = \frac{1}{20,25} = \frac{100}{2025} = \frac{4}{81}$.
- N'alourdissez pas inutilement vos calculs : lorsque l'exposant est entier, on est dans une situation à priori simple et familière ! Par exemple, il ne sera probablement pas très intéressant de remplacer $1,5^2$ par $e^{2\ln 1,5}$ …
- Le comportement de la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ dépend de la valeur de a !
  Confrontés à une telle fonction, votre premier réflexe doit être « a est-il plus grand ou plus petit que 1 ? ».