

Fiche PanaMaths (Terminale S)

Croissances comparées

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

- Les principales règles de calcul des limites de fonctions ;
- Les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Ce que vous devez retenir

1. Les limites en $+\infty$:

Pour n entier naturel non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

On dit que « toute puissance entière (naturelle) l'emporte sur le logarithme népérien ».

En fait, on retiendra : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, la limite ci-dessus en découlant immédiatement.

Pour n entier naturel :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

On dit que « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance (naturelle) ».

On remarque que le résultat reste valable lorsque la puissance est négative (mais dans ce cas, on n'a plus affaire à une forme indéterminée ...).

On retiendra :

En $+\infty$:

- L'exponentielle croît plus vite que toute puissance ;
- Toute puissance croît plus vite que le logarithme népérien.

2. La limite en $-\infty$ (n entier naturel) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

On retiendra :

En $-\infty$ l'exponentielle décroît plus vite que toute puissance.

3. La limite en 0 (n entier naturel non nul) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

En fait, on retiendra : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$, la limite ci-dessus en découlant immédiatement.

Ce que vous devez savoir faire

Il est important de savoir se ramener à l'une des situations mentionnées ci-dessus !

Exemple 1

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{e^{5x+3}}{44x^4}$. On demande : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour tout x réel non nul, on a :

$$f(x) = \frac{e^{5x+3}}{44x^4} = \frac{e^{5x} \times e^3}{44 \times x^4} = \frac{e^3}{44} \times \frac{e^{5x}}{x^4} = \frac{e^3}{44} \times \frac{5^4 e^{5x}}{5^4 x^4} = \frac{e^3}{44} \times 5^4 \times \frac{e^{5x}}{5^4 x^4} = \frac{5^4 e^3}{44} \times \frac{e^{5x}}{(5x)^4}$$

L'idée directrice de la démarche ci-dessus est de faire apparaître au dénominateur une puissance de l'argument ($5x$) de l'exponentielle.

Posons : $X = 5x$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{(5x)^4} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^4} = +\infty$.

Or $\frac{5^4 e^3}{44} > 0$, d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^4 e^3}{44} \times \frac{e^{5x}}{(5x)^4} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^4 e^3}{44} \times \frac{e^X}{X^4} \right) = +\infty$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exemple 2

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = \sin x \ln x$. On demande : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f(x) = \sin x \ln x = \frac{\sin x}{x} x \ln x$$

Or, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.

Finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$$

Ce à quoi vous devez faire particulièrement attention !

On prendra garde de ne pas confondre les résultats valables en $-\infty$ et ceux valables en $+\infty$!