

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.
 - a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.
 - b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75% des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.
 - a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
 - b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
 - c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Analyse

Nouveaux thèmes, nouveaux exercices ... Celui-ci aborde, tout en restant proche du cours, deux thèmes majeurs : les lois à densité (la question 1 correspond à deux calculs simples sur une loi normale) et la fluctuation (la question 2 correspond à un test sur une fréquence).

On soulignera ici l'emploi, malheureux :

- Du mot « moyenne » pour la loi normale de la question 1. Il aurait fallu employer le mot « espérance ».
- De l'expression « ... au seuil de confiance de 95%. » dans la question 2.b. Emploi malheureux car une telle expression est réservée aux intervalles de confiance et apparaît donc dans des problématiques d'estimation.

Résolution

Question 1.a.

On cherche ici : $p(30 \leq X \leq 35)$ (les inégalités apparaissant ici peuvent être indifféremment des inégalités larges ou strictes).

La variable aléatoire X suivant loi normale $\mathcal{N}(40,5 ; 12^2)$, on obtient à la calculatrice :

$$p(30 \leq X \leq 35) \approx 0,133$$

Question 1.b.

On cherche cette fois : $p(X \geq 55)$.

On obtient à la calculatrice :

$$p(X \geq 55) \approx 0,113$$

Question 2.a.

Pour un échantillon de 1 000 demandes de prêt immobilier, on note Y le nombre de prêts accordés. Ces demandes sont choisies au hasard et de façon indépendante. De surcroît, 75% d'entre elles sont acceptées (d'après la banque). Ainsi, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 75\% = 0,75$.

On a :

- $n = 1\,000 > 30$;
- $np = 1\,000 \times 0,75 = 750 > 5$;
- $n(1-p) = 1\,000 \times 0,25 = 250 > 5$.

On peut donc utiliser comme intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence F , l'intervalle $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

Ici, en arrondissant à 10^{-3} :

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,75 - 1,96 \frac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{1000}} \approx 0,723$$

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,75 + 1,96 \frac{\sqrt{0,75 \times 0,25}}{\sqrt{1000}} \approx 0,777$$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des prêts accordés est :

$$[0,723 ; 0,777]$$

Question 2.b.

On souhaite tester ici l'hypothèse comme quoi le pourcentage de demandes de prêt immobilier acceptées est égal à 75%.

Disposant (cf. la question précédente) d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées pour un échantillon de 1000 demandes, la règle de décision est alors la suivante :

- Si la fréquence effectivement observées des demandes de prêt immobilier acceptées appartient à l'intervalle de fluctuation, on accepte l'hypothèse,
- sinon, on rejette l'hypothèse.

Question 2.c.

Pour l'échantillon considéré, la fréquence f des demandes de prêt acceptées est égale à :

$$f = \frac{600}{1000} = 0,6$$

Comme 0,6 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 2.a, on rejette, selon la règle de décision énoncée à la question précédente (risque de 5%), l'hypothèse comme quoi le pourcentage de demandes de prêt immobilier acceptées est égal à 75%.

Finalement :

Le slogan publicitaire de la banque semble ... bien optimiste et probablement en décalage avec la réalité !