Pondichéry – Avril 2010 – Série S – Exercice

Partie A – Restitution organisée des connaissances

Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.

On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt$;
- Si pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)\geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt\geq 0$.

Montrer que : si pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)\leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt\leq\int_a^b g(t)dt$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=\ln\left(1+x^n\right)$ et on pose $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Etudier les variations de f_1 sur $[0;+\infty[$.
   c. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser : pour tout $x\in[0;1]$, $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$)

2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0\leq I_n\leq\ln 2$.
   b. Etudier les variations de la suite $\left(I_n\right)$.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

a. Etudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0;+\infty[$.

Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a :

$$\ln(1+x^n)\leq x^n$$

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Analyse

Deux thèmes principaux : les suites et les intégrales. Ce « couple » est désormais un grand classique que l'on va devoir (si ce n'est déjà fait !) s'habituer à rencontrer régulièrement. Les techniques calculatoires étant finalement assez standard, l'exercice ne présente pas de difficulté particulière mais couvre une bonne partie des chapitres correspondants du programme : croissance de l'intégrale, intégration par parties, suites bornées, suites décroissante et minorée, … sans oublier quelques variations (fonction et suite) comme études de base !

Résolution

Partie A – Restitution organisée des connaissances

Puisque l'on a : $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t)$, il vient immédiatement $\forall t \in [a,b],\ (g-f)(t) \geq 0$.

D'après le deuxième résultat fourni, on a alors : $\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right) dt \geq 0$.

Cette inégalité entraîne alors : $\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right) dt + \int_a^b f(t)\, dt \geq \int_a^b f(t)\, dt$.

Le premier résultat fourni nous permet alors d'écrire : $\int_a^b \left[\left(g(t) - f(t)\right) + f(t)\right] dt \geq \int_a^b f(t)\, dt$,

c'est-à-dire : $\int_a^b g(t)\, dt \geq \int_a^b f(t)\, dt$. Le résultat est ainsi établi.

Remarque : en toute rigueur, l'inégalité $\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right) dt \geq 0$ ne permet pas de conclure puisque la propriété $\int_a^b \left(-f(t)\right) dt = -\int_a^b f(t)\, dt$ ne fait pas partie des données …

Partie B

Question 1.a.

Pour tout réel x dans l'intervalle $[0;+\infty[$, on a : $f_1(x) = \ln(1+x)$.

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, il vient (composition) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty}$$

Question 1.b.

La fonction f_1 est la composée de :

- la fonction affine : $x \mapsto x+1$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (le coefficient de « x » est strictement positif) et, à fortiori, sur $\left[0;+\infty\right[$. Cette fonction prend ses valeurs dans $\left[1;+\infty\right[$;
- la fonction logarithme népérien qui est définie et strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et, à fortiori, sur $\left[1;+\infty\right[$.

On en conclut immédiatement :

La fonction f_1 est strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.

Question 1.c.

On a : $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\times 1\,dx$.

La fonction f_1 est de la forme $x \mapsto \ln(x+1) = \ln\left[g(x)\right]$ avec g dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, à fortiori, sur $\left[0;+1\right[$. On a alors immédiatement, pour tout réel x de cet intervalle :

$$f_1'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Cette fonction est elle-même définie et continue sur $\left[0;+1\right[$ en tant que fonction rationnelle.

La fonction constante définie sur $\left[0;+1\right[$ par $x \mapsto 1$ est continue sur cet intervalle et y admet donc des primitives. Elles sont de la forme : $x \mapsto x+k$ où k est une constante réelle que nous pouvons choisir librement. Au regard de l'expression de la dérivée de la fonction f_1 et en ne perdant pas de vue l'objectif (intégration par partie), nous choisissons $k=1$.

L'intégration par parties s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x)\,dx \\ &= \left[(x+1)\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\frac{1}{x+1}\,dx \\ &= (1+1)\ln(1+1) - (0+1)\ln(1+0) - \int_0^1 dx \\ &= 2\ln 2 - \cancel{\ln 1} - 1 \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1}$$

Cette valeur correspond à l'aire du domaine limité par la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Remarque : on retrouve naturellement cette valeur en utilisant l'indication de l'énoncé.

Question 2.a.

Pour tout *n* entier naturel non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, à fortiori, sur $[0;+1]$. Il en va donc de même pour la fonction $x \mapsto 1+x^n$, puis, par composition avec la fonction logarithme népérien, pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x^n)$.

On a donc : $0 \le x \le 1 \Rightarrow \ln(1+0^n) \le \ln(1+x^n) \le \ln(1+1^n)$. Soit : $0 \le f_n(x) \le \ln 2$.

Par croissance de l'intégrale on a alors : $\int_0^1 0dx \le \int_0^1 f_n(x)\,dx \le \int_0^1 \ln 2dx$, soit, finalement :

$$\boxed{0 \le I_n \le \ln 2}$$

Question 2.b.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,dx - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)\right]dx \\ &= \int_0^1 \ln\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\,dx \end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a :

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \times x^n \le x \times x^n \le 1 \times x^n \Leftrightarrow 0 \le x^{n+1} \le x^n \Leftrightarrow 1 \le 1 + x^{n+1} \le 1 + x^n .$$

On en déduit alors : $0 < \dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \le 1$ et, enfin : $\ln \dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \le 0$.

Il vient alors : $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} dx \le 0$, soit $I_{n+1} - I_n \le 0$.

Finalement :

La suite (I_n) est décroissante.

Question 2.c.

A la question 2.a. nous avons montré que la suite (I_n) était minorée par 0. Comme, d'après la question précédente, elle est décroissante, on en déduit immédiatement :

La suite (I_n) est convergente.

Question 3.a.

On note que l'on a, pour tout réel x positif : $g(x) = f_1(x) - x$.
La fonction g est donc dérivable comme différence de deux fonctions dérivable et on a, pour tout réel x positif :

$$g'(x) = f_1'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Pour x positif, on a $1 + x > 0$ et, de fait : $g'(x) \le 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0; +\infty]$ (elle y est même strictement décroissante puisque sa dérivée ne s'annule qu'en 0).

La fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty]$.

Question 3.b.

On a facilement : $g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a alors :

$$x \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \le g(0) \Leftrightarrow g(x) \le 0$$

La fonction g prend des valeurs négatives sur $[0; +\infty]$.

Pour tout réel x positif et tout entier naturel n non nul, on a : $x^n \geq 0$. Le résultat obtenu à la question précédente nous donne alors : $g\left(x^n\right) \leq 0$, c'est-à-dire : $\ln\left(1+x^n\right) - x^n \leq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+x^n\right) \leq x^n}$$

Question 3.c.

L'inégalité précédente nous donne (croissance de l'intégrale), pour tout entier naturel n non nul : $\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) dx \leq \int_0^1 x^n dx$, soit : $I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.

Or, on a : $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

En utilisant la minoration de la question 2.a., on a donc : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes nous donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$