Synthèse de cours PanaMaths
→ Variables aléatoires à densité

Variable aléatoire à densité

Variable aléatoire réelle continue

Soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que « X est une variable aléatoire réelle continue » si elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle continue prenant ses valeurs dans l'intervalle I.

On dit que « X est une variable aléatoire réelle à densité » s'il existe une fonction réelle *f* de la variable réelle telle que :

- La fonction *f* est <u>continue</u> sur I.
- La fonction *f* est <u>positive</u> sur I ($\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq 0$).
- $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = 1$.

On dit alors que « la fonction *f* est une densité de probabilité » et que « X est une variable aléatoire réelle de densité de probabilité *f* » (ou que « X est une variable aléatoire réelle de densité *f* » ou bien encore que « la loi de probabilité de X admet pour densité *f* »).

Remarque sur l'écriture $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx$:

- Si $\mathrm{I} = [a\,;b]$, $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Il s'agit de l'intégrale dite « définie » vue dans le cours sur l'intégration.
- Si $\mathrm{I} = [a\,;+\infty[$, $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = \int_{[a\,;+\infty[} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} f(x)\,dx$.
- Si $\mathrm{I} =]-\infty\,;a]$, $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = \int_{]-\infty\,;a]} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{a} f(x)\,dx$.
- Si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty} \int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx$ (α étant un réel quelconque).

Autre remarque : la continuité de *f* est une condition forte qui garantit que pour tout segment $[a\,;b]$ dans l'intervalle I, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. En fait, il existe des densités non continues partout sur I.

Propriété fondamentale

Si X est une variable aléatoire réelle de densité *f* sur l'intervalle I alors pour tous réels *a* et *b* dans I ($a \le b$) on a :

$$\mathrm{P}(a \le \mathrm{X} \le b) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \in [a\,;b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Conséquences (calculs de probabilités)

Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité *f* sur l'intervalle I.

Pour tous réels *a* et *b* ($a < b$) de I, on a :

- $p(\mathrm{X} = a) = 0$;
- $p(\mathrm{X} > a) = p(\mathrm{X} \ge a)$;
- $p(a < \mathrm{X} < b) = p(a < \mathrm{X} \le b) = p(a \le \mathrm{X} < b) = p(a \le \mathrm{X} \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque : si J et K sont deux intervalles disjoints inclus dans I alors on a $\mathrm{J} \cap \mathrm{K} = \varnothing$ et donc $P(\mathrm{J} \cap \mathrm{K}) = 0$. La première des conséquences ci-dessus nous permet de comprendre que la réciproque est fausse ! En effet, si on considère dans I les intervalles $\mathrm{J} = [a\,;b]$ et $\mathrm{K} = [b\,;c]$ (avec $a < b < c$), on a $[a\,;b] \cap [b\,;c] = \{b\} \neq \varnothing$ mais $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in [a\,;b] \cap [b\,;c]) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = b) = 0$.

Espérance

Soit X une variable aléatoire réelle de densité *f* sur l'intervalle I.

On appelle « espérance de X », notée $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, le réel (sous réserve d'existence de l'intégrale) :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} x\, f(x)\,dx$$

Trois exemples de lois à densité

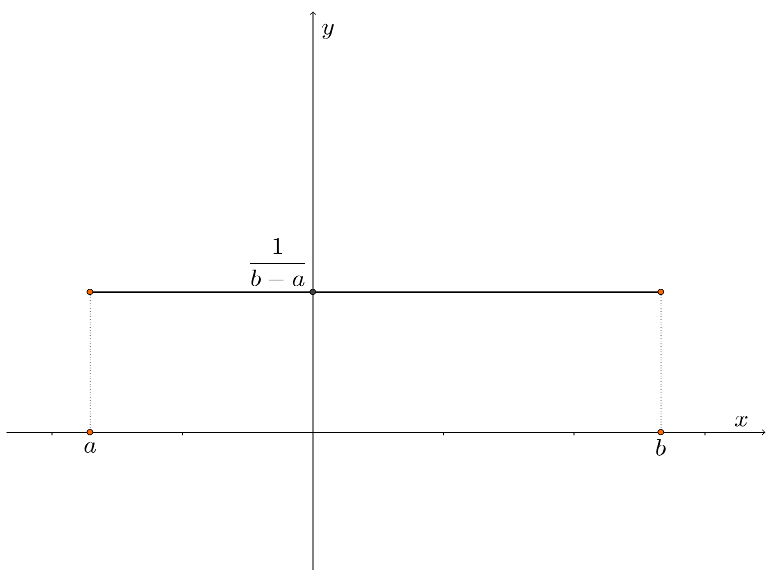
La loi uniforme sur $[a\,;b]$

Définition

On dit que « la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ » si elle admet une densité constante *f* sur cet intervalle. La fonction *f* est alors définie par :

$$f:[a\,;b]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{1}{b-a}$$

Remarque : la valeur de la constante est obtenue grâce à l'égalité : $\int_a^b f(x)\,dx=1$.



Espérance

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors elle admet une espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ qui vaut :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_a^b\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$$

La loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité continue de densité *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Remarque : cette loi est classiquement utilisée pour modéliser des durées de vie (par exemple d'un atome radioactif avant sa désintégration, d'un appareil avant sa première panne, …). D'où la notation « *t* » faisant référence à un temps.

Probabilités

Soit *T* une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tous réels positifs *a* et *b* ($a \leq b$), on a :

$$P(T \in [a\,;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(T \geq a) = P(T > a) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a}$$

$$P(T \leq a) = P(T < a) = \int_{-\infty}^{a} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$$

Propriété fondamentale

Soit *T* est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

On a, pour tous réels positifs *t* et *s* :

$$P_{T>t}(T > t+s) = P(T > s)$$

T est dite « sans mémoire » ou « sans vieillissement ».

Si nous interprétons *T* comme un temps, l'égalité $P_{T>t}(T > t+s) = P(T > s)$ signifie que le fait d'atteindre au moins l'instant $t+s$, sachant que l'instant *t* a été atteint, ne dépend pas de *t*. En d'autres termes, la probabilité que « la durée de vie » soit au moins égale à *s*, ne dépend pas de l'instant déjà atteint.

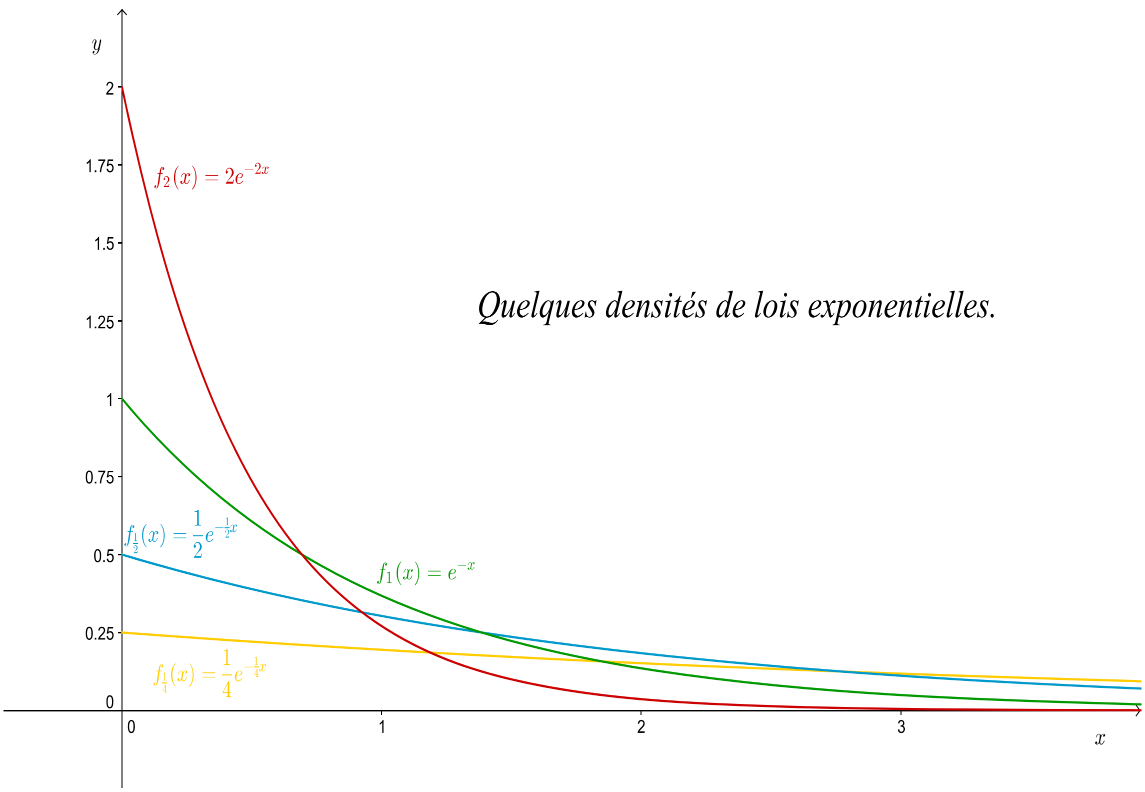
Espérance

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}$$

Courbes représentatives

Nous fournissons ci-dessous quelques courbes représentatives de densités de lois exponentielles obtenues pour diverses valeurs du paramètre λ (2, 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$).



Remarque : pour toute valeur strictement positive du paramètre λ, on a :

$$f(0)=\lambda \text{ et } \lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\lambda e^{-\lambda t}\right)=0$$

La loi normale

Variable aléatoire centrée réduite

On dit que « la variable aléatoire réelle X est centrée » si son espérance est nulle.

On dit que « la variable aléatoire réelle X est réduite » si son écart type est égal à 1.

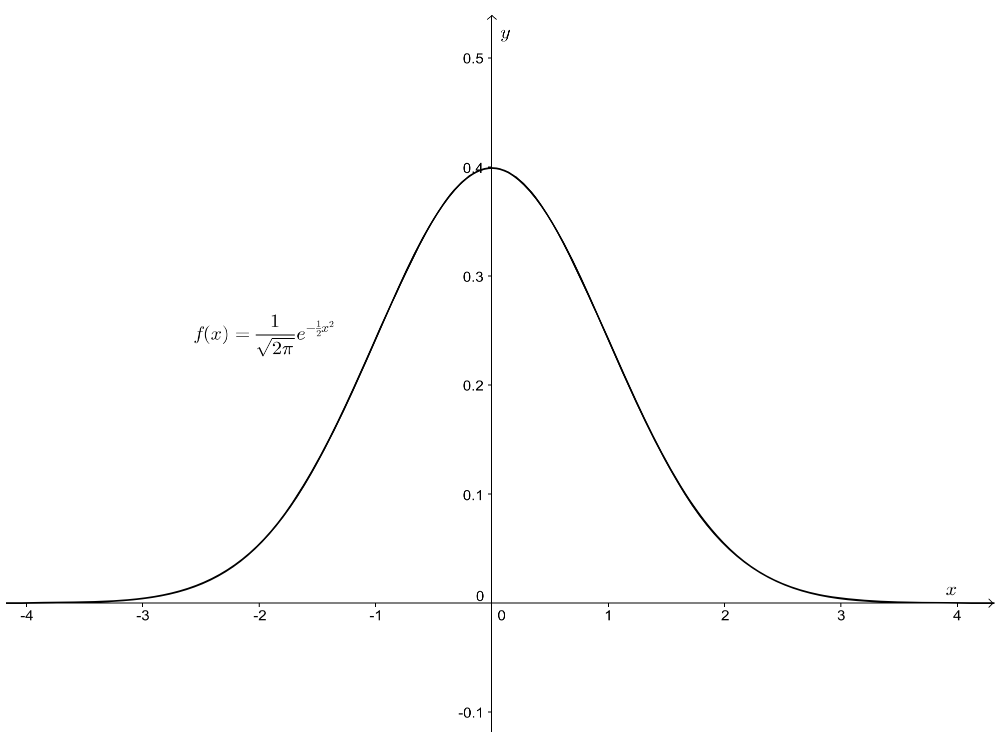
On dit que « la variable aléatoire réelle X est centrée réduite » si son espérance est nulle et son écart type égal à 1.

La loi normale centrée réduite

La loi normale centre réduite, notée « $\mathcal{N}(0;1)$ », est la loi de probabilité continue de densité *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Nous fournissons ci-dessous la courbe représentative de la fonction *f*.



Cette courbe, célèbre, est dite « courbe en cloche ».

Espérance et écart type

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite alors :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \text{ et } \sigma_{\mathrm{X}} = 1$$

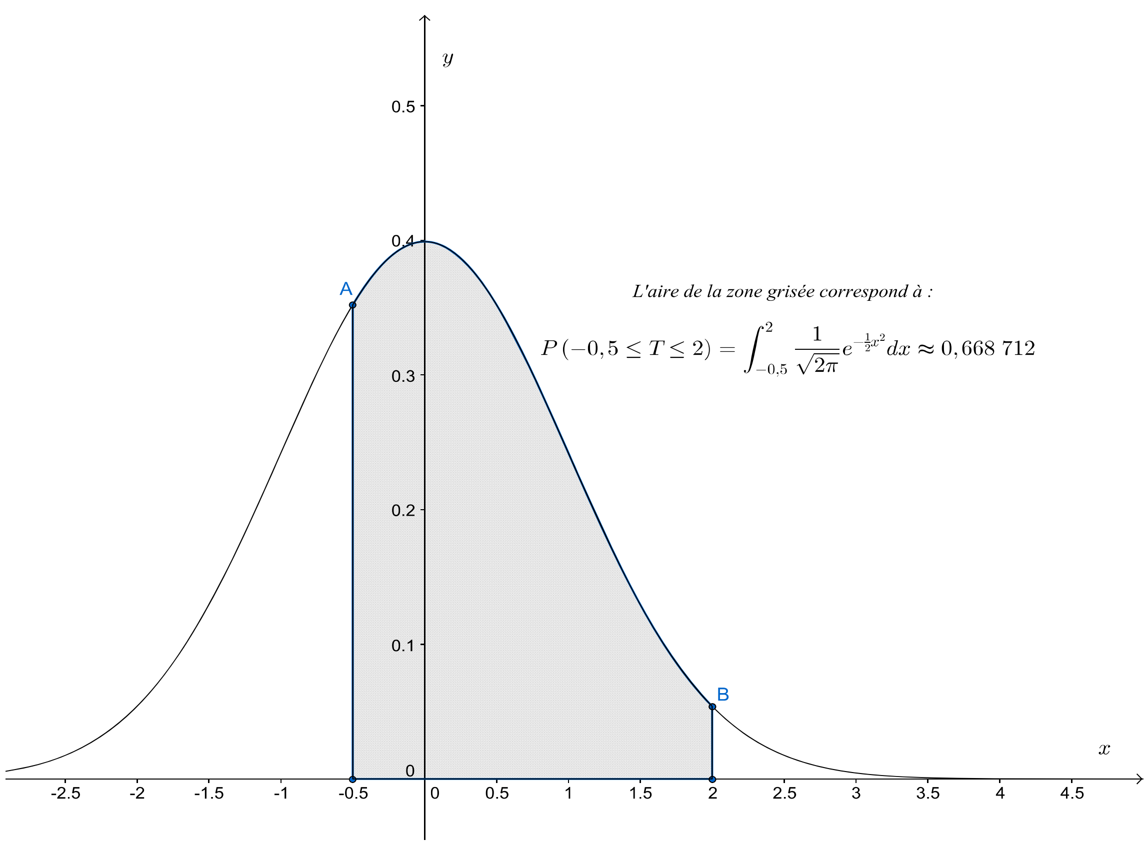
Exemple de calcul de probabilité

On suppose que la variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite.
On cherche $p(-0,5 \leq T \leq 2)$.

Graphiquement, cette probabilité est égale à l'aire sous la courbe de la densité f sur l'intervalle $[-0,5\,;2]$ (voir la figure ci-dessous).

A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, on obtient :

$$p(-0,5 \leq T \leq 2) = 0,668\,712$$



Des valeurs utiles

On retiendra les valeurs suivantes d'usage fréquent :

$$p(-1 \le T \le 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \simeq 0,683 = 68,3\%$$

$$p(-2 \le T \le 2) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \simeq 0,955 = 95,5\%$$

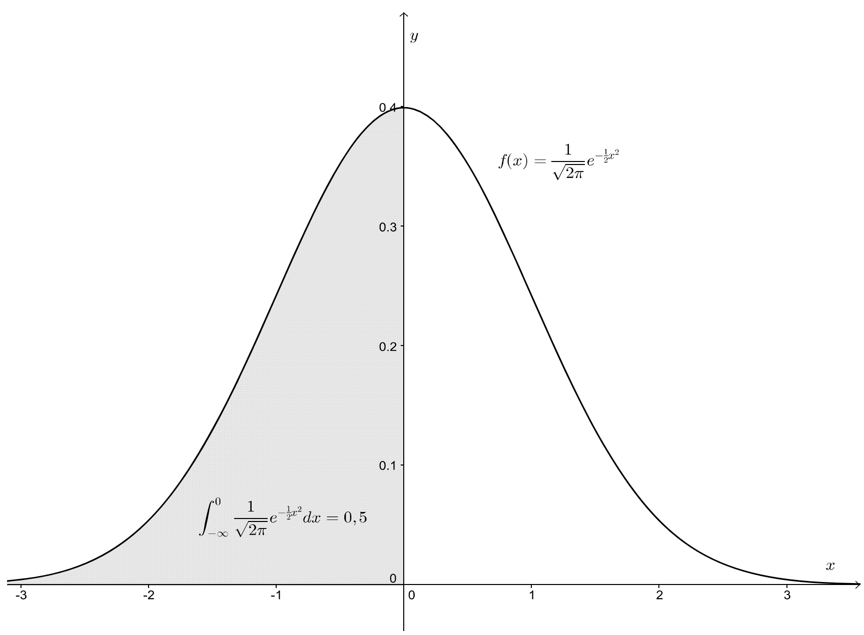
$$p(-3 \le T \le 3) = \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \simeq 0,997 = 99,7\%$$

Dans d'autres situations très courantes (cf. par exemple en statistiques, la notion d'intervalle de confiance), on impose plutôt la valeur de la probabilité : 0,95 dans bien des cas. Avec des bornes arrondies au centième, on obtient alors pour l'intervalle de T : $[-1,96\,;1,96]$. Ceci signifie que 95% des réalisations de la variable aléatoire T appartiennent à l'intervalle $[-1,96\,;1,96]$.

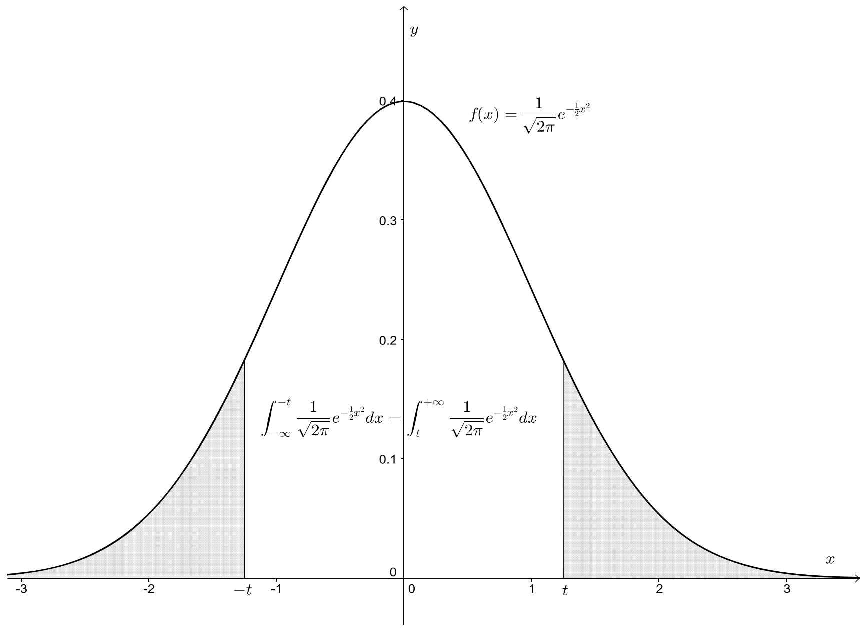
Propriétés

La fonction f étant paire, on a :

$$\boxed{p(T \le 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = p(T \ge 0) = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0,5}$$



Pour tout réel t : $p(T \leq -t) = p(T \geq t)$
et il en résulte : $p(T \leq -t) = 1 - p(T < t)$



La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition

On dit que « la variable aléatoire réelle X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ » (avec $\sigma > 0$) si, et seulement si, la variable aléatoire centrée réduite $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Remarque : on admet aussi l'écriture $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

Espérance et écart type

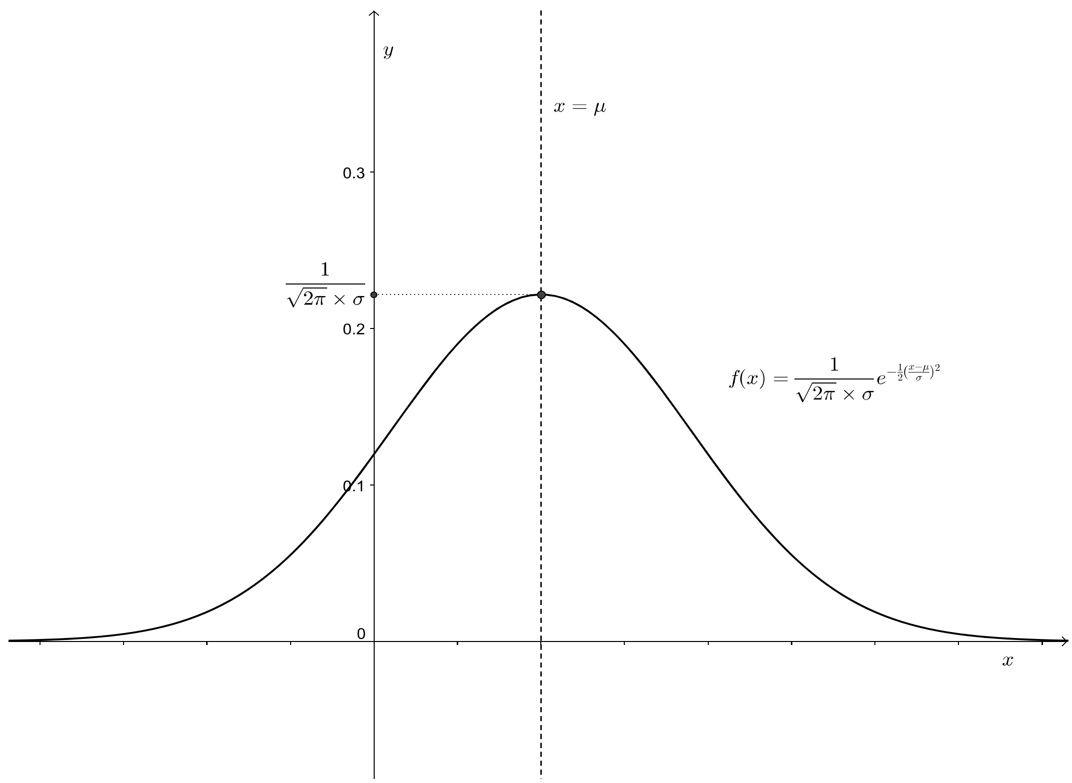
L'espérance et l'écart type de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ valent respectivement μ et σ.

Densité (hors programme)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$ alors elle admet une densité *f* définie sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque : la courbe représentative de la fonction *f* est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

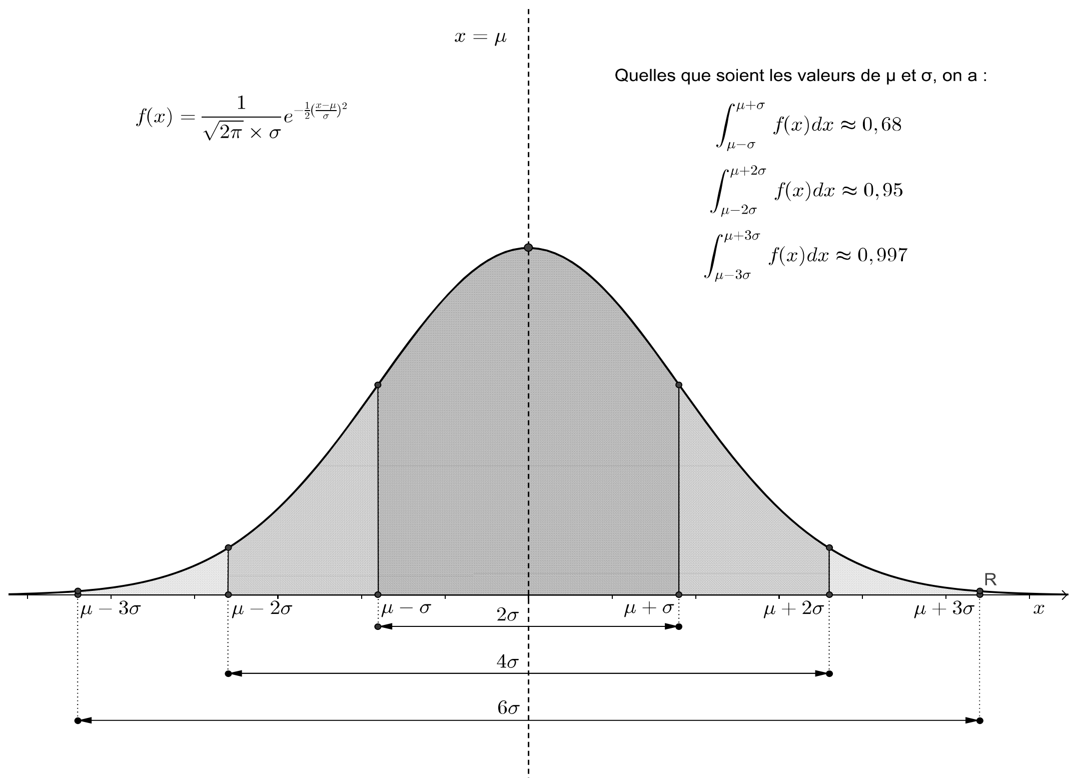


Probabilités remarquables

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$ alors :

$$p\left(\mu-\sigma \le \mathrm{X} \le \mu+\sigma\right) \simeq 0,68$$
$$p\left(\mu-2\sigma \le \mathrm{X} \le \mu+2\sigma\right) \simeq 0,95$$
$$p\left(\mu-3\sigma \le \mathrm{X} \le \mu+3\sigma\right) \simeq 0,997$$

Dans le cas d'une loi normale, l'écart type σ permet ainsi de « mesurer » simplement la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire autour de l'espérance μ.



Effet de l'écart type

Pour une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$ la densité f admet un maximum global pour $x = \mu$ et on a : $f\left(\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma}$.

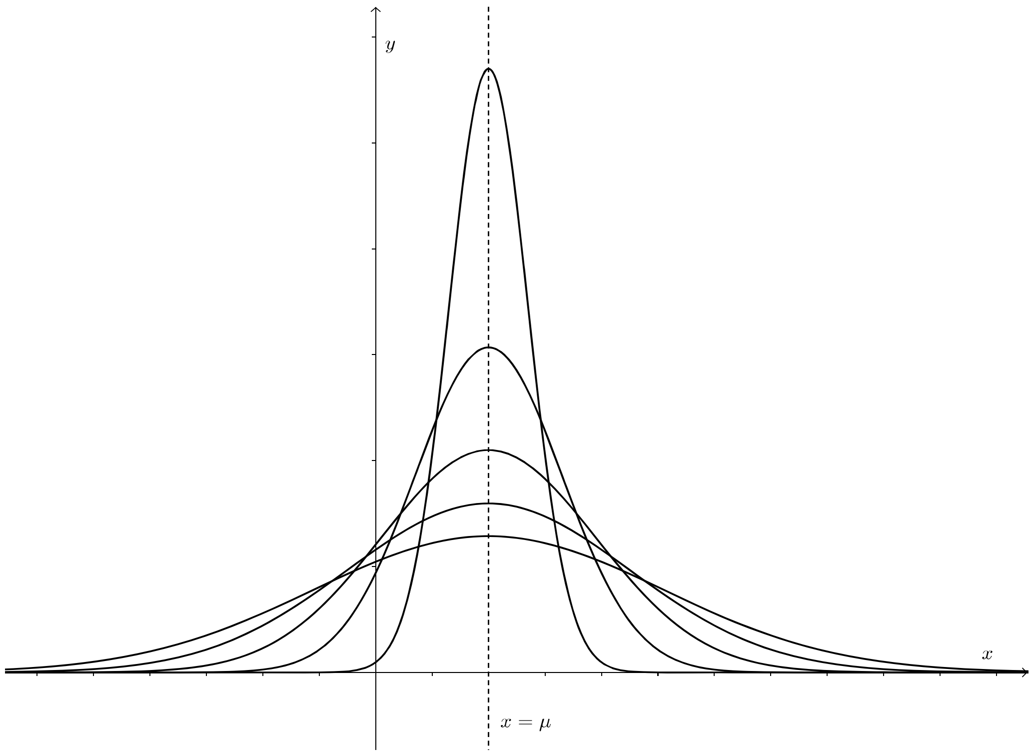
Ainsi, la valeur de ce maximum est-elle d'autant plus élevée que l'écart type σ est faible. De même, la longueur de l'intervalle $\left[\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma\right]$, à savoir 6σ, est également faible.

Dans cette « première » situation qualitative, on peut dire que l'espérance de la loi est porteuse d'information puisque l'essentiel des réalisations de la variable X sera proche de cette espérance.

A contrario, si la valeur de l'écart type est élevée, le maximum $f\left(\mu\right)$ sera faible mais la longueur de l'intervalle $\left[\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma\right]$, sera élevée.

Dans cette deuxième situation qualitative, l'essentiel des réalisations de X se trouve dans un « grand » intervalle et l'espérance n'est pas porteuse d'une information significative.

Nous fournissons ci-dessous quatre densités de lois normales de même espérance μ pour diverses valeurs de l'écart type σ. La courbe est d'autant plus aplatie que σ est élevé.



Le théorème de Moivre-Laplace

Théorème

Soit p un réel dans l'intervalle $]0\,;1[$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi de Bernoulli de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Rappelons que l'on a : $\mathrm{E}(X_n) = np$ et $\sigma_{Z_n} = \sqrt{np(1-p)}$.

La variable aléatoire centrée réduite associée à X_n est donc : $X_n^* = \dfrac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

On a, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(X_n^* \in I\right) = \int_I \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

On dit que « la suite $\left(X_n^*\right)$ converge en loi » vers la loi normale centrée réduite.

Une utilisation du théorème de Moivre-Laplace (hors programme)

Principe

Dans la pratique, le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilités menés sur une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres *n* et *p*, *n* étant « grand » (voir plus loin) par des calculs menés sur une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}\left(np\,;np(1-p)\right)$.

Condition d'application

En règle générale, on utilisera l'approximation dès lors que la condition $np(1-p)>10$. Cette condition garantit que *n* est suffisamment grand, en particulier lorsque *p* est proche de 0 ou 1.

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $p=0,2$ et $n=80$.
On cherche $P(\mathrm{X}=12)$ et $P(\mathrm{X}\geq 20)$.

On a : $np(1-p)=80\times 0,2\times(1-0,2)=16\times 0,8=12,8>10$.
On va donc approcher X par une variable aléatoire Y suivant la loi normale $\mathscr{N}(16\,;12,8)$.

On approche $P(\mathrm{X}=12)$ par $P(11,5<Y\leq 12,5)$.
A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur (par exemple), on obtient :

$$P(\mathrm{X}=12)\simeq 0,063\,447$$
$$P(11,5<Y\leq 12,5)\simeq 0,059\,734$$

En reprenant la démarche précédente, on a, en tenant compte de $P(X\geq 20)=1-P(X\leq 19)$:

$$\begin{aligned}P(\mathrm{X}\leq 19)&=P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=2)+\ldots+P(\mathrm{X}=19)\\&\simeq P(\mathrm{Y}\leq 0,5)+P(0,5<\mathrm{Y}\leq 1,5)+P(1,5<\mathrm{Y}\leq 2,5)+\ldots+P(18,5<\mathrm{Y}\leq 19,5)\\&=P(\mathrm{Y}\leq 19,5)\end{aligned}$$

On va donc approcher $P(X\geq 20)=1-P(X\leq 19)$ par $1-P(Y\leq 19,5)=P(Y>19,5)$.

$$P(X\geq 20)=1-P(X\leq 19)\simeq 0,163\,414$$
$$1-P(Y\leq 19,5)=P(Y>19,5)\simeq 0,163\,968$$