Synthèse de cours PanaMaths
→ Topologie des espaces métriques

Espaces métriques

Distance et espace métrique

Définitions

Soit E un ensemble.

On appelle « distance sur E » toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$;
- $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

Un ensemble E sur lequel on a défini une distance d est appelé « espace métrique ». On le note (E,d) (ou, plus simplement, E lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre).

Remarques :

- Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire : dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

- A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer une autre inégalité parfois appelée « deuxième inégalité triangulaire » :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left| d(x,y) - d(y,z) \right| \le d(x,z)$$

Exemples

Sur $\mathbb{R}$ on définit la distance usuelle par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = |y-x|$ où $|\ |$ désigne la valeur absolue.

Sur $\mathbb{C}$ on définit la distance usuelle par : $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ d(x,y) = |y-x|$ où $|\ |$ désigne le module complexe.

Sur $\mathbb{R}^n$ on peut définir, pour tout entier *p* non nul, la distance d_p par :

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Trois d'entre elles sont couramment utilisées (on pourra prendre le temps de vérifier que ce sont effectivement des distances) :

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

(d_2 est appelée « distance euclidienne »)

$$d_\infty(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

Si on considère maintenant l'ensemble $\mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$ des fonctions continues de l'intervalle $[a;b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, on pourra définir des distances analogues aux distances ci-dessus.

Pour tout couple (f, g) de fonctions de $\mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$:

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

(distance de la convergence en moyenne)

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt}$$

(distance de la convergence en moyenne quadratique)

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a;b]} |f(t) - g(t)|$$

(distance de la convergence uniforme)

Distances équivalentes

Soit *E* un ensemble et d_1 et d_2 deux distances définies sur *E*.

On dira que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \alpha d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta d_1(x, y)$$

On vérifiera que :

- la relation ainsi définie est une relation d'équivalence ;
- les distances d_1, d_2 et d_∞ de $\mathbb{R}^n$ définies ci-dessus sont équivalentes.

Topologie des espaces métriques

Boule ouverte, boule fermée, sphère

Soit (E,d) un espace métrique.

On appelle « boule ouverte (respectivement fermée) de centre *x* et de rayon *r* » l'ensemble des *y* de *E* dont la distance à *x* est strictement inférieure (respectivement inférieure ou égale) à *r*. On la note $\mathcal{B}(x,r)$ (respectivement : $\mathcal{B}_f(x,r)$). On a donc :

$$\mathcal{B}(x,r)=\{y\in E\,/\,d(x,y)<r\}$$

(respectivement : $\mathcal{B}_f(x,r)=\{y\in E\,/\,d(x,y)\le r\}$)

<u>Remarque : sans plus de précision, le terme « boule » désignera, dans la suite de ce document, une boule ouverte.</u>

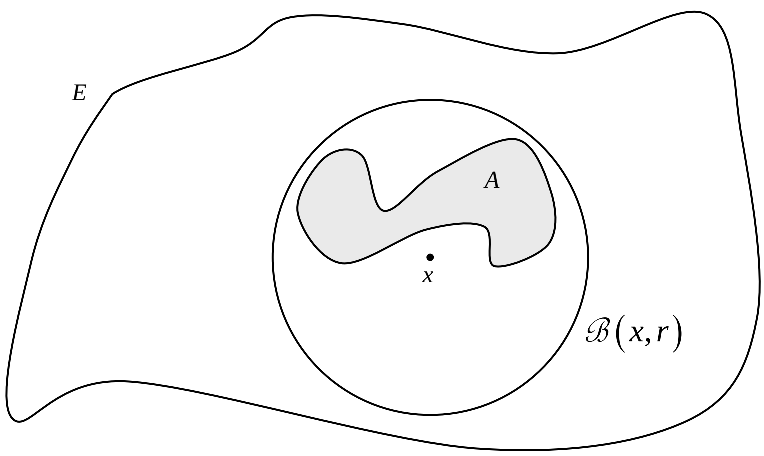
On peut également introduire, bien que l'usage en soit nettement moins fréquent, la notion de « sphère » de centre *x* et de rayon *r*. Il s'agit des éléments *y* de *E* situés à la distance *r* de *x*. On la note : $\mathcal{S}(x,r)$. On a donc :

$$\mathcal{S}(x,r)=\{y\in E\,/\,d(x,y)=r\}$$

Partie bornée d'un espace métrique

Soit (E,d) un espace métrique et soit *A* une partie de *E*.

On dira que « *A* est une partie bornée de *E* » si elle est contenue dans une boule.



Considérons une partie bornée A d'un espace métrique (E,d). Il existe donc une boule $\mathscr{B}(x,r)$ contenant A : $\forall a \in A,\ a \in \mathscr{B}(x,r)$. On en déduit alors :

$$\forall (a,a') \in A^2,\ d(a,a') \leq d(x,a') + d(x,a') < 2r$$

De ce résultat on tire :

- Pour un point quelconque a de A, il existe une boule de centre a contenant A ;
- La distance entre deux points quelconques de A est majorée par $2r$. L'ensemble $\{d(a,a') / (a,a') \in A^2\}$ étant majoré, il admet donc une borne supérieure finie.

Le deuxième résultat conduit à introduire :

On considère une partie A d'un espace métrique (E,d).
L'ensemble $\{d(a,a') / (a,a') \in A^2\}$ admet une borne supérieure (éventuellement infinie) que l'on appelle « diamètre de A ». On le note $\delta(A)$. On a donc :

$$\delta(A) = \sup_{(a,a') \in A^2} \{d(a,a')\}$$

On a alors la propriété :

A bornée $\Leftrightarrow$ $\delta(A)$ est fini

Ouvert, fermé, voisinage

Soit (E,d) un espace métrique.
Une partie O de (E,d) sera dite « ouverte » (on dit également qu'il s'agit d'« un ouvert de (E,d) ») si elle est égale à une union de boules ouvertes.

Remarque : une boule ouverte, qui est la réunion d'elle-même (!), est donc une partie ouverte.

Une boule ouverte est un ouvert.

On a en fait une caractérisation très intéressante des ouverts d'un espace métrique :

Soit (E,d) un espace métrique et soit O une partie de (E,d). On a :

$$O \text{ ouvert de E} \Leftrightarrow \forall a \in O,\ \exists \mathscr{B}(a,r) \subset O$$

Soit (E,d) un espace métrique.

Une partie F de (E,d) sera dite « fermée » (on dit également qu'il s'agit d'« un fermé de (E,d) ») si son complémentaire $F^c = E - F$ est ouvert.

On retiendra :

Une boule fermée est un fermé.

Soit (E,d) un espace métrique et soit x un élément de E.

Soit V une partie de E.
On dira que V est un « voisinage de x » s'il existe un ouvert O de E contenant x et inclus dans V : $x \in O \subset V$.

Remarques :

- par définition, un voisinage d'un point est non vide puisqu'il contient ce point !
- considérons un couple (x, y) de points distincts d'un espace métrique (E,d) et posons $r = \dfrac{d(x, y)}{3}$ (pour fixer les idées, mais d'autres choix sont possibles).
  Dans ces conditions, on a : $x \in \mathcal{B}(x,r)$, $y \in \mathcal{B}(y,r)$ et $\mathcal{B}(x,r) \cap \mathcal{B}(y,r) = \varnothing$.
  On a ainsi mis en évidence deux voisinages (en l'occurrence ce sont des ouverts), l'un de x et l'autre de y, d'intersection vide. On dit que (E,d) est « séparé ». Tout espace métrique est séparé mais ce n'est pas le cas pour un espace topologique quelconque.

Intérieur, adhérence

Définition et propriété fondamentale de l'intérieur

On considère une partie A d'un espace métrique (E,d).

On appelle « intérieur de A », noté $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points a de E dont A est un voisinage.

A partir de cette définition, on a quelques propriétés fondamentales :

$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A.

On peut aller plus loin ! Non seulement $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert mais :

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

A partir de ce qui précède, on arrive à la caractérisation suivante d'un ouvert :

A ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow$ A est un voisinage de chacun de ses points.

Propriétés élémentaires de l'intérieur

(E,d) est un espace métrique et A et B sont deux parties quelconques de E.

- $\overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing$ et $\overset{\circ}{E} = E$;
- $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;
- $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;
- $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overparen{A \cap B}}$;
- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overparen{A \cup B}}$;

Définition et propriété fondamentale de l'adhérence

On considère une partie A d'un espace métrique (E,d).

On appelle « adhérence de A », noté $\overline{A}$, l'ensemble des points a de E tels que tout voisinage V de a rencontre A.

De façon analogue a ce qui a été fait précédemment, on peut déduire de la définition les propriétés suivantes :

$\overline{A}$ est un fermé contenant A.

Ici encore, nous pouvons aller plus loin ! Non seulement $\overline{A}$ est un fermé mais :

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Propriétés élémentaires de l'adhérence

(E,d) est un espace métrique et A et B sont deux parties quelconques de E.

- $\overline{\varnothing} = \varnothing$ et $\overline{E} = E$;
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
- $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;
- $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$;
- $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$;

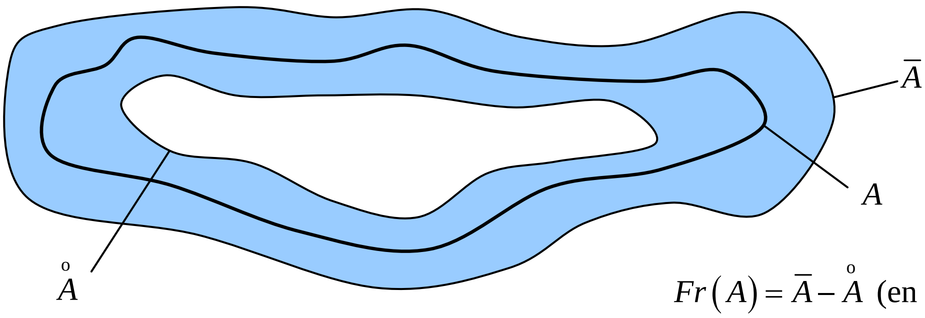
Partie dense, frontière

On considère une partie A d'un espace métrique (E,d).
On dira que « A est dense dans E » si on a : $\overline{A}=E$.

Exemples fondamentaux : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Les notions précédentes permettent de définir un troisième ensemble important associé à toute partie A d'un espace métrique :

On considère une partie A d'un espace métrique (E,d).
On appelle « frontière de A », noté $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A}-\overset{\circ}{A}$.



$Fr(A)=\overline{A}-\overset{\circ}{A}$ (en bleu)

Remarque : puisque l'on a : $Fr(A)=\overline{A}-\overset{\circ}{A}=\overline{A}\cap\left(\overset{\circ}{A}\right)^c$, la frontière de toute partie A d'un espace métrique est l'intersection de deux fermés ($\overline{A}$ et $\left(\overset{\circ}{A}\right)^c$) et est, de ce fait, un fermé.

On montre facilement à partir des propriétés de base de l'intérieur et de l'adhérence :

$$Fr(A)=Fr(A^c)$$

Application continue

Isométrie

Soit deux espaces métriques (E,d) et (F,d'). Soit f une application de E dans F.
On dira que f est une isométrie si elle conserve la distance. C'est-à-dire si l'on a :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ d'\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)$$

Continuité en un point, continuité

Soit deux espaces métriques (E,d) et (F,d'). Soit *f* une application de *E* dans *F*.
Soit *a* un point de *E*.
On dira que « *f* est continue en *a* » si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall x \in E,\ d(x,a) < \alpha \Rightarrow d'\left(f(x), f(a)\right) < \varepsilon$$

Si l'application *f* est continue en tout point *a* de *E*, on dit qu'elle est « continue sur *E* » ou, plus simplement, « continue ».

Remarques :

- on peut prendre conscience du fait que la définition de la continuité traduit en fait la non discontinuité de l'application *f* en *a*, c'est-à-dire l'absence d'un saut !
- On peut traduire l'énoncé à l'aide de boules :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall x \in E,\ x \in \mathscr{B}(a,\alpha) \Rightarrow f(x) \in \mathscr{B}'\left(f(a),\varepsilon\right)$$

On montre immédiatement qu'une isométrie de (E,d) dans (F,d') est continue sur *E*.

Homéomorphisme

Soit deux espaces métriques (E,d) et (F,d'). Soit *f* une application de *E* dans *F*.
Si *f* est continue et bijective et si l'application réciproque f^{-1} est également continue alors *f* est appelée « homéomorphisme ».

On doit ici citer un cas important, celui des isométries.
On établit en effet qu'une isométrie est injective et continue. On en tire alors que si elle est surjective, il s'agit d'un homéomorphisme et que son inverse est aussi une isométrie.

Caractérisations des applications continues

Soit deux espaces métriques (E,d) et (F,d'). Soit *f* une application de *E* dans *F*.
Soit *a* un point de *E*.
On a :

f continue en *a* $\Leftrightarrow \forall V$ voisinage de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de *a*.

Ici encore, une définition s'appuyant sur les voisinages peut-être exprimée de façon équivalente à l'aide des ouverts de l'espace considéré :

Soit deux espaces métriques (E,d) et (F,d'). Soit f une application de E dans F.
On a :

$$f \text{ continue sur } E \Leftrightarrow \forall V \text{ ouvert de } F,\ f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } E$$

Suites d'un espace métrique

Suite convergente

Soit (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E.
On dit que « (u_n) converge vers l » si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) < \varepsilon$$

Autre formulation :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \in \mathcal{B}(l, \varepsilon)$$

Interprétation : quelle que soit la boule $\mathcal{B}(l,\varepsilon)$ considérée, il existe un rang N (qui dépend donc de ε) à partir duquel <u>tous les termes</u> de la suite (u_n) se trouvent dans la boule $\mathcal{B}(l,\varepsilon)$.

De cette définition, on tire une propriété immédiate :

Soit (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E.
Si (u_n) converge alors sa limite est unique.

Valeur d'adhérence d'une suite

Soit (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E.
Soit a un élément de E.
On dit que « a est une valeur d'adhérence de (u_n) » si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N / d(u_n, a) < \varepsilon$$

Autre formulation :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N / u_n \in \mathcal{B}(a, \varepsilon)$$

Interprétation : quelle que soit la boule $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$ considérée et quel que soit le rang N considéré, il existe au moins un terme de (u_n) de rang strictement supérieur à N appartenant à cette boule.

On ne confondra pas cette notion avec celle de limite. Ici, on sait qu'il existe une infinité de termes de la suite aussi proches qu'on le désire de a. Mais cela ne signifie pas (contrairement à ce qui se passe avec la limite) que tous les termes de la suite sont aussi proches qu'on le désire de a à partir d'un certain rang …

Donnons un exemple dans le cas d'une suite réelle. La suite (u_n) définie par :

$$u_n = \begin{cases} 2+\dfrac{1}{n+1} & \text{pour } n \equiv 0[3] \\ -5+\dfrac{1}{n} & \text{pour } n \equiv 1[3] \\ \pi-\dfrac{7}{n^2} & \text{pour } n \equiv 2[3] \end{cases}$$

admet trois valeurs d'adhérence : -5, 2 et π.

On établit :

> Soit (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E.
> Soit a un élément de E.
>
> Si la suite (u_n) converge vers a alors a est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Bien sûr (cf. ci-dessus), la réciproque est fausse. En revanche, on a le résultat suivant qui est souvent très utile dans les démonstrations :

> Soit (E,d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E.
> Soit a une valeur d'adhérence de (u_n).
>
> Alors on peut extraire de (u_n) une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers a.

Les suites dans un espace métrique permettent d'obtenir une caractérisation intéressante de l'adhérence d'une partie.

> Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E.
> Soit a un élément de E.
>
> $a \in \overline{A} \Leftrightarrow$ a est valeur d'adhérence d'une suite d'éléments de A.

A partir de là, on a :

> Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E.
>
> A fermée $\Leftrightarrow$ toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.

Suite et continuité

On peut également, dans l'esprit de ce qui précède, donner la propriété suivante qui établit un lien entre suite d'éléments d'un espace métrique et application continue :

> Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et f une application continue de E dans F.
> Soit a un élément de E et (u_n) une suite d'éléments de E.
>
> Si (u_n) converge vers a alors $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Complétude

Suite de Cauchy, espace complet

> Soit (E,d) un espace métrique et soit (u_n) une suite d'éléments de E.
> On dit que « la suite (u_n) est de Cauchy » si on a :
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geq n \geq N \Rightarrow d(u_m,u_n) < \varepsilon$$

On a la propriété fondamentale :

> Soit (E,d) un espace métrique et soit (u_n) une suite d'éléments de E.
>
> Si (u_n) converge alors (u_n) est une suite de Cauchy.

> Soit (E,d) un espace métrique.
> On dira que (E,d) est un « espace complet » si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Travailler dans un espace complet permet ainsi d'étudier la convergence éventuelle d'une suite sans avoir besoin de connaître son éventuelle limite ! Il suffira dans certains cas, d'établir que la suite est de Cauchy.

Soit (E,d) un espace métrique et soit (u_n) une suite d'éléments de *E*.

Si (u_n) est une suite de Cauchy et possède une valeur d'adhérence *a* alors (u_n) converge vers *a*.

Théorème du point fixe

Comme application fondamentale de la complétude, on a le théorème du point fixe :

Soit (E,d) un espace métrique complet et *f* une application contractante de *E* dans *E*.
L'application *f* admet alors un unique point fixe, limite de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Remarque : rappelons qu'une application est dite contractante lorsqu'elle est *k*-lipschitzienne avec $k \in [0;1[$.

Compacité

Note : dans cette partie, nous ne donnons pas la définition générale d'un espace compact. Notre cadre étant celui des espaces métriques, nous en fournissons « seulement » une caractérisation.

Caractérisation pour les espaces métriques

Soit (E,d) un espace métrique.
On a :

E compact
$\Leftrightarrow$ toute suite de *E* possède une valeur d'adhérence
$\Leftrightarrow$ de toute suite de *E* on peut extraire une suite convergente.

Dans bien des cas, on s'intéressera aux parties compactes d'un espace topologique non nécessairement compact lui-même (c'est le cas de $\mathbb{R}^n$).

Lien entre compacité et complétude

Tout espace métrique compact est complet.

Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées de $\mathbb{R}^n$.

Compacité et continuité

On a la propriété fondamentale suivante :

Soit *f* une application d'un espace métrique compact (E,d) dans un espace topologique séparé *F*.

Si *f* est continue alors $f(E)$ est une partie compacte de *F*.

Plus généralement :

Soit *f* une application d'un espace métrique (E,d) dans un espace topologique séparé *F*.

Si *f* est continue alors l'image de toute partie compacte de *E* est une partie compacte de *F*.

Comme exemple fondamental d'espaces séparés on a bien sûr les espaces métriques. Plus particulièrement, dans le cadre des fonctions numériques de plusieurs variables réelles, on aura $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}$.