Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Sommes directes de sous-espaces vectoriels

Dans ce document, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Généralités

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.
Soit $(E_1, E_2, ..., E_n)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On appelle « somme des sous-espaces vectoriels » E_i l'ensemble :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_i &= E_1 + E_2 + ... + E_n \\ &= \bigcup_{x_i \in E_i} \{x_1 + x_2 + ... + x_n\} \\ &= \left\{ x \in E \,/\, \exists (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ x = x_1 + x_2 + ... + x_n \right\}\end{aligned}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, il s'agit de l'espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$.

Si tout élément x de la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose de façon unique en $x_1 + x_2 + ... + x_n$ (avec, pour tout i, $x_i \in E_i$) on dit que la somme est « directe » et on la note alors :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

Deux caractérisations

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.
Soit $(E_1, E_2, ..., E_n)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On a :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \Leftrightarrow \left\{ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0_E \right\}$$

Remarque : cette caractérisation peut servir de définition. Dans ce cas, on établit que la somme est directe si, et seulement si, tout vecteur de la somme se décompose de façon unique en une somme de vecteurs de la forme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.
Soit $(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
On a :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0_E\}$$

Remarques. Cas de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2.

1. La caractérisation précédente s'écrit :

$$E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

2. Si on a $E_1 \oplus E_2 = E$ alors les sous-espaces E_1 et E_2 sont dits « supplémentaires ».

Cas de la dimension finie

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Théorème

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On note d sa dimension.
Soit $(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives d_1, d_2, … d_n.
Soit $\mathcal{B}_1 = (e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1d_1})$, $\mathcal{B}_2 = (e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2d_2})$, …, $\mathcal{B}_n = (e_{n1}, e_{n2}, \ldots, e_{nd_n})$ des bases de $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$ respectivement.
Alors la famille $\mathcal{B} = (e_{11},\ e_{12},\ \ldots,\ e_{1d_1},\ e_{21},\ e_{22},\ \ldots,\ e_{2d_2},\ \ldots,\ e_{n1},\ e_{n2},\ \ldots,\ e_{nd_n})$ est une famille génératrice de la somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$.

De surcroît, la famille $\mathcal{B}$ est libre si, et seulement si, la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Remarque : si on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, on dit alors que $\mathcal{B}$ est une « base adaptée à la décomposition de E en $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ ».

Du théorème précédent on tire les corollaires :

- $\dim\left(E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n\right) = \dim E_1 + \dim E_2 + ... + \dim E_n$;
- $\dim\left(E_1 + E_2 + ... + E_n\right) \leq \dim E_1 + \dim E_2 + ... + \dim E_n$. Plus précisément dans le cas de deux sous-espaces vectoriels : $\dim\left(E_1 + E_2\right) = \dim\left(E_1\right) + \dim\left(E_1\right) - \dim\left(E_1 \cap E_2\right)$;
- $\dim\left(E_1 + E_2 + ... + E_n\right) = \dim E_1 + \dim E_2 + ... + \dim E_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$;
- Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Somme directe et application linéaire

Théorème

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Soit $\left(E_1,\ E_2,\ ...,\ E_n\right)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$.

Soit $\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_n$ n applications linéaires de, respectivement E_1 dans F, E_2 dans F, …, E_n dans F.

Alors il existe une seule application linéaire φ telle que pour tout i dans $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ la restriction de φ à E_i soit égale à φ_i.