Synthèse de cours PanaMaths (Terminale S)
→ Produit scalaire dans l'espace

Notes : dans cette synthèse de cours, on suppose connues les notions du programme de 1ère S relatives au produit scalaire dans le plan. Par ailleurs, l'espace est noté $\mathscr{E}$.

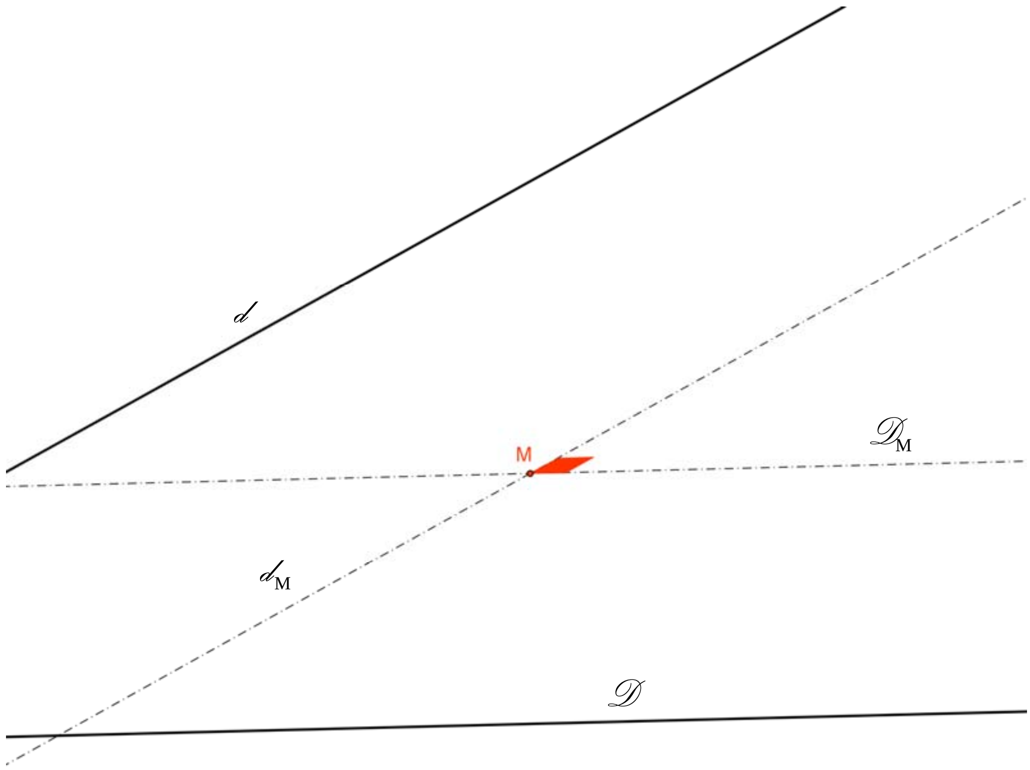
Orthogonalité et perpendicularité dans l'espace

Orthogonalité de deux droites de l'espace

Définition

Soit $\mathscr{d}$ et $\mathscr{D}$ deux droites de l'espace.

On dit que « $\mathscr{d}$ et $\mathscr{D}$ sont orthogonales » si, pour tout point M de l'espace, la parallèle $\mathscr{d}_{\mathrm{M}}$ à $\mathscr{d}$ passant par M et la parallèle $\mathscr{D}_{\mathrm{M}}$ à $\mathscr{D}$ passant par M sont perpendiculaires.

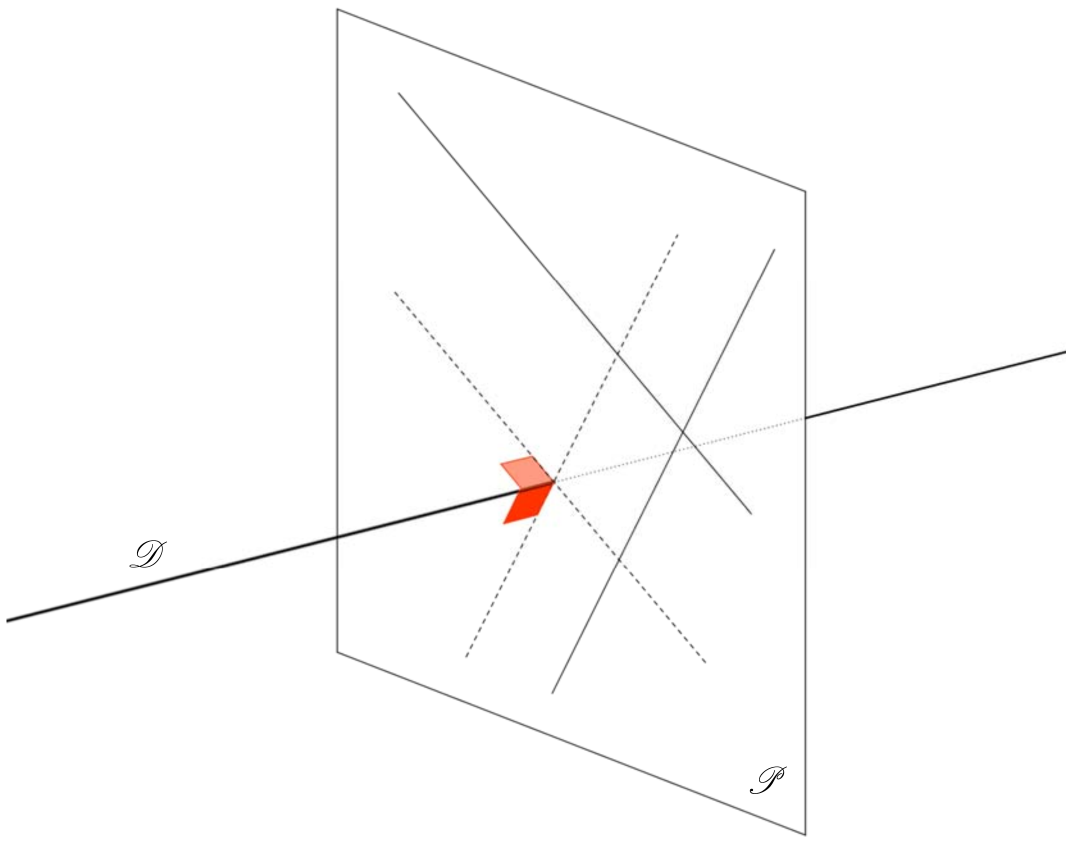


Remarque : il suffit que les parallèles soient perpendiculaires en un point de l'espace pour que les droites considérées soient orthogonales.

Perpendicularité d'un plan et d'une droite de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ respectivement un plan et une droite de l'espace.

On dit que « $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires » si toute droite de $\mathscr{P}$ est orthogonale à $\mathscr{D}$.



Remarque : dans la pratique, on pourra utiliser le théorème suivant :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires

$\Leftrightarrow$

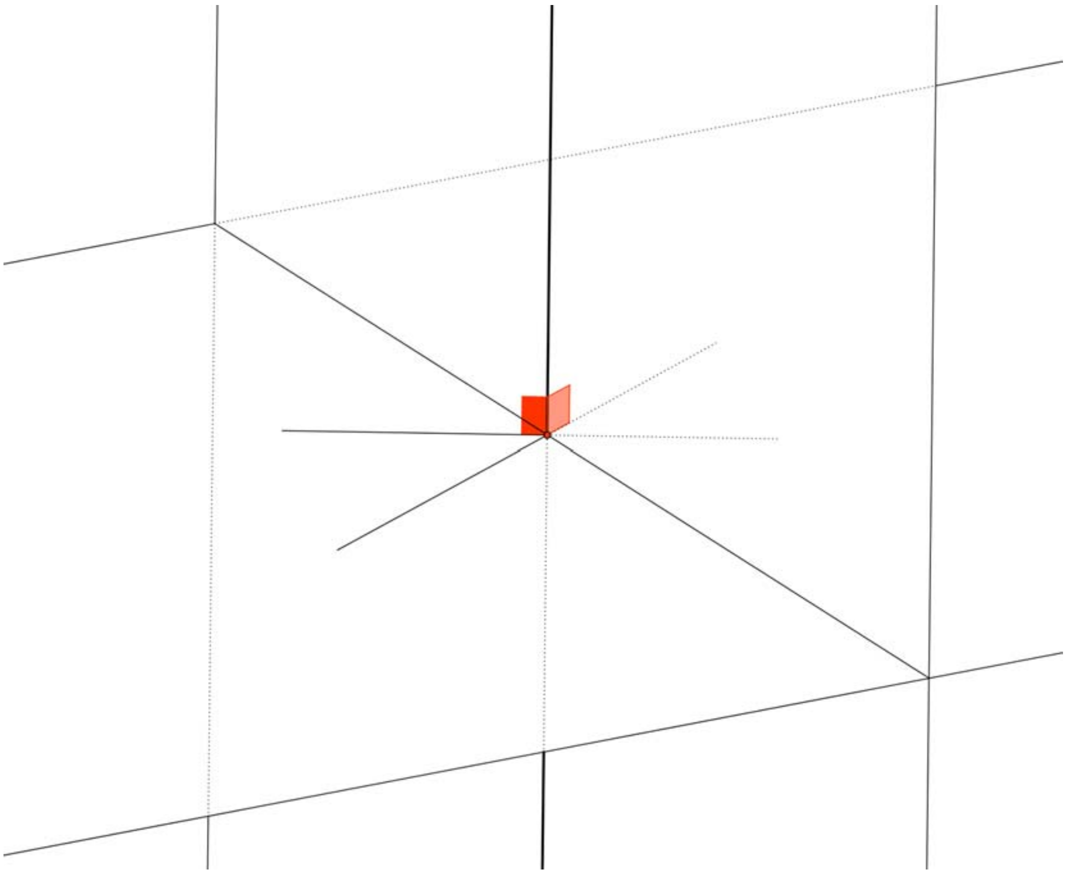
$\mathscr{D}$ est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

C'est le cas sur la figure précédente (considérer les sécantes en pointillés).

Perpendicularité de deux plans de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans de l'espace.

On dit que « $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires » si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre



On en tire alors :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires

$\Leftrightarrow$

toute droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ est orthogonale à toute droite perpendiculaire à $\mathscr{Q}$.

ATTENTION ! Deux droites de deux plans perpendiculaires ne sont, en général, pas orthogonales !

Vecteur normal à un plan

Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur.

On dit que « $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ » s'il existe une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{n}$ et perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Propriété

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur.

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, alors toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » si, et seulement si :

- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou …
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ et (AB) orthogonale à (CD).

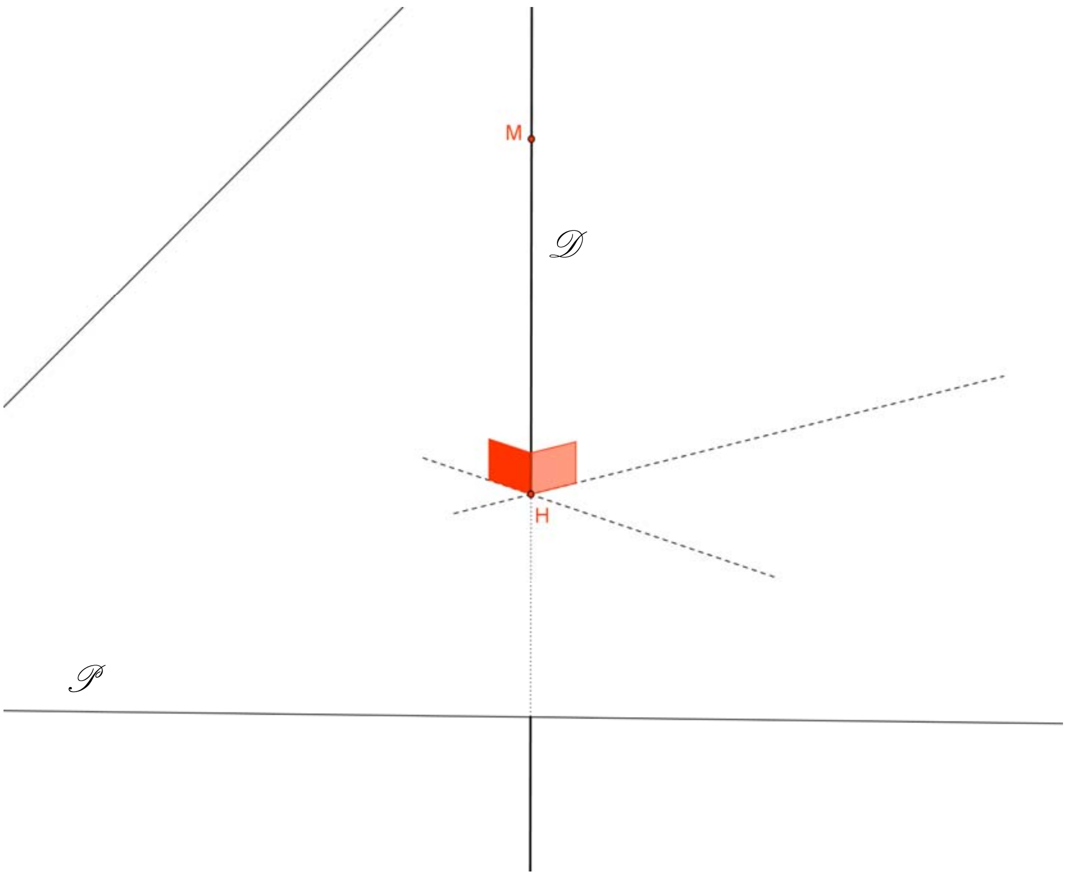
Projections orthogonales dans l'espace

Projection d'un point sur un plan

Définition

Soit $\mathscr{P}$ et M respectivement un plan et un point de l'espace.

Soit $\mathscr{D}$ l'unique droite de l'espace perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par M.
Son intersection avec le plan $\mathscr{P}$ est un point H appelé « projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ ».



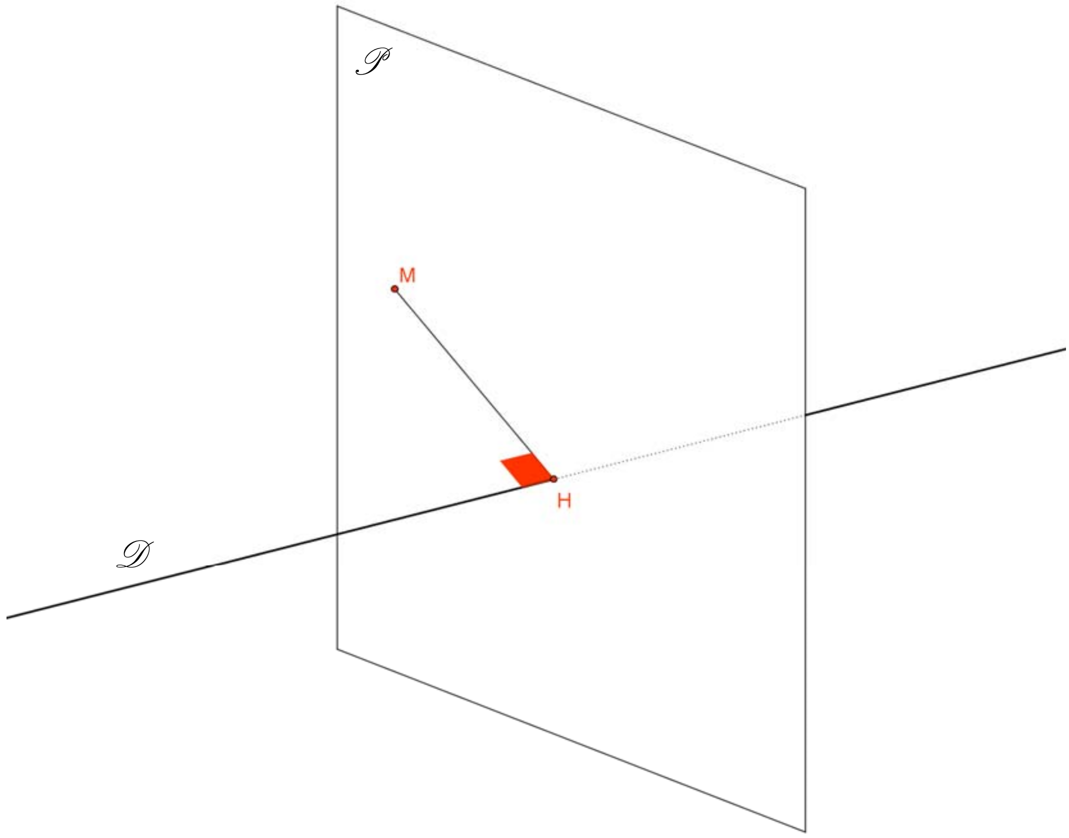
Remarque : si M est un point du plan $\mathscr{P}$ alors M et H sont confondus (le projeté de M sur $\mathscr{P}$ est M lui-même).

Projection d'un point sur une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ et M respectivement une droite et un point de l'espace.

Soit $\mathscr{P}$ l'unique plan de de l'espace perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.
Son intersection avec la droite $\mathscr{D}$ est un point H appelé « projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ ».



Remarque : si M est un point de la droite $\mathscr{D}$ alors M et H sont confondus (le projeté de M sur $\mathscr{D}$ est M lui-même).

Produit scalaire dans l'espace

Définition théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$) et soit $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ deux autres représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \vec{v}$)
Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans contenant les points A, B et C, d'une part, et les points A', B' et C', d'autre part.

Alors les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ défini dans le plan $\mathscr{P}$, d'une part, et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ défini dans le plan $\mathscr{Q}$, d'autre part, sont égaux et on pose :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$$

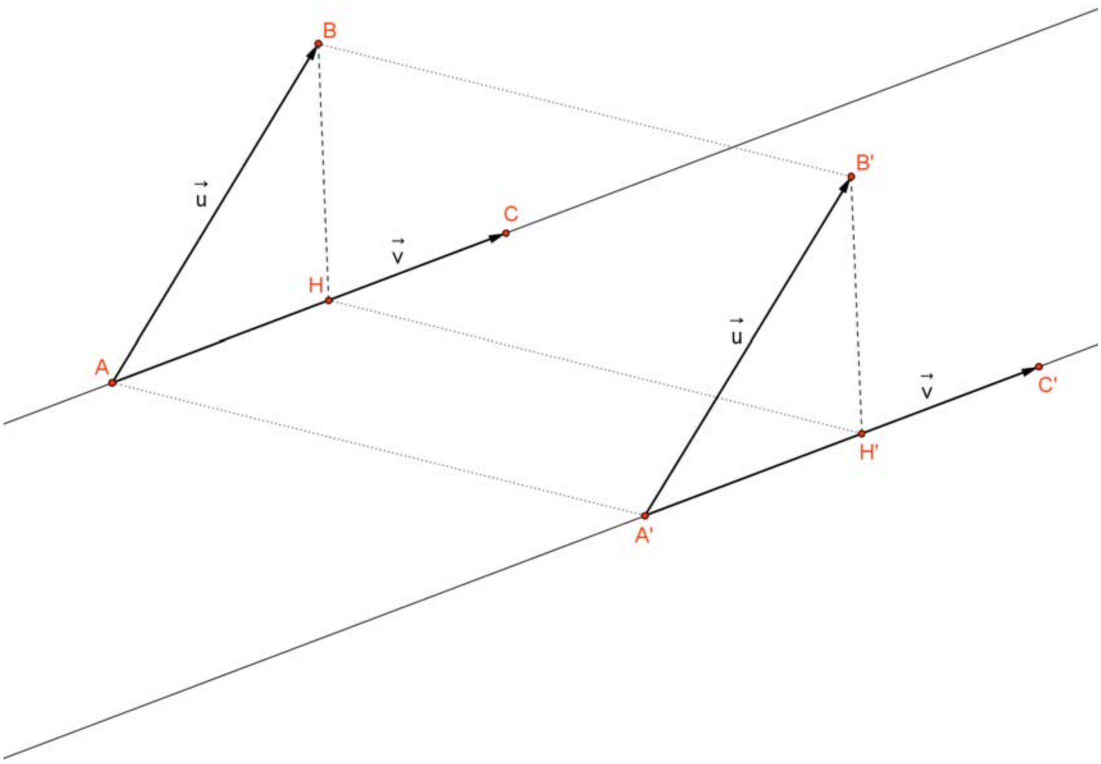
Remarques :

- Lorsque les points A, B et C (respectivement A', B' et C') ne sont pas alignés, le plan $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{Q}$) est unique.

- Le résultat découle de l'égalité suivante :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} &= \frac{1}{2}\left(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$
On pourrait d'ailleurs (mais ceci requiert d'abord de définir une norme …) utiliser l'égalité : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ comme définition du produit scalaire.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, on a : $\vec{u}.\vec{0} = 0$.

- Le produit $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé « carré scalaire » du vecteur $\vec{u}$.
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, on a :
$$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$



Expressions du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Voir la figure 1 ci-après) :

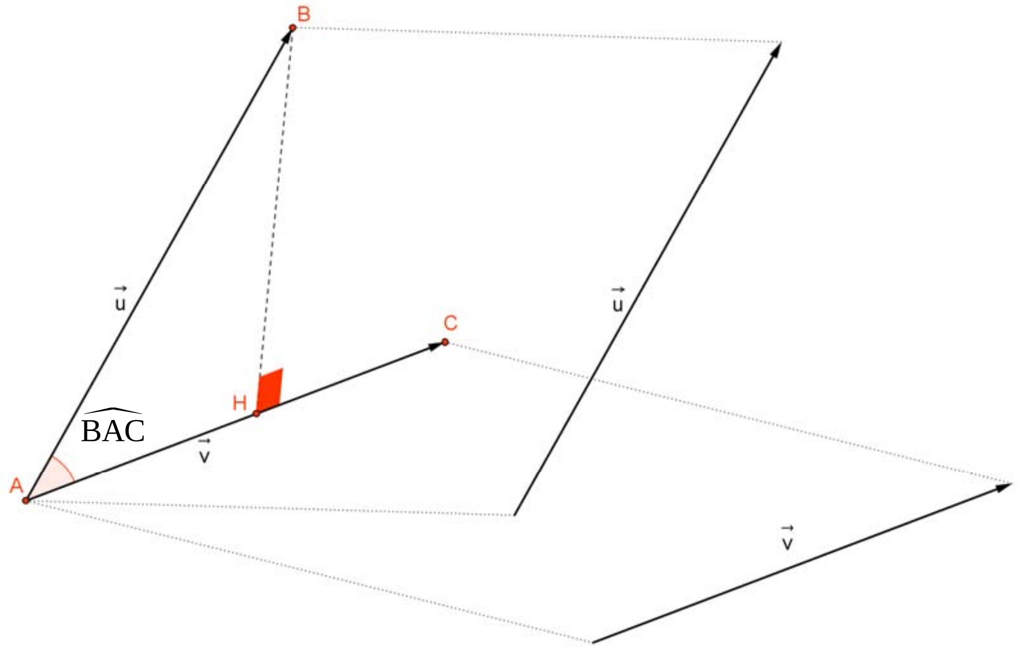
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{ABC}}$$

2. En notant H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), on a :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$

3. Enfin, si l'espace est rapporté à un repère orthonormal et si dans ce repère, on a $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y' + z \times z'}$$



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel α :

$$(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Applications du produit scalaire

Caractérisation de l'orthogonalité et de la perpendicularité

Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Droites orthogonales

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ sont orthogonales si, et seulement si, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.

Droite et plan perpendiculaires

Soit $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ respectivement une droite et un plan de l'espace.

$\mathscr{D}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ si et seulement si, il existe quatre points A, B, C et D de $\mathscr{P}$ tels que :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ne sont pas colinéaires :
- $\vec{u}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$.

Plans perpendiculaires

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires si, et seulement si : $\vec{n}.\vec{n}' = 0$.

Caractérisation d'objets géométriques

Plan

Caractérisation

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$. Soit A un point de $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ est alors l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{\text{AM}}.\vec{n} = 0$:

$$\mathscr{P} = \left\{ \text{M} \in \mathscr{E} \,/\, \overrightarrow{\text{AM}}.\vec{n} = 0 \right\}$$

Equation cartésienne

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.

$\mathscr{P}$ est un plan de l'espace si, et seulement si, il existe quatre réels *a*, *b*, *c* et *d* ($(a,b,c) \neq (0;0;0)$) tels que $\mathscr{P} = \left\{ \text{M}(x,y,z) \in \mathscr{E} \,/\, ax+by+cz+d=0 \right\}$. Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

« $ax+by+cz+d=0$ » est appelée « équation cartésienne » de $\mathscr{P}$.

Tout plan de l'espace admet une infinité d'équations cartésiennes (définies à un facteur multiplicatif non nul près).

Remarques :

- Notons O l'origine du repère ; avec $\text{M}(x,y,z)$ et $\vec{n}(a,b,c)$, on a alors :
  $ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}}.\vec{n}+d=0$.
  Le terme constant d'une équation cartésienne d'une plan $\mathscr{P}$ trouve ainsi une interprétation simple.

- Remarque : dans un repère quelconque, l'équation $ax+by+cz+d=0$ définit encore un plan mais le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ n'a alors aucune raison d'être normal au plan ainsi défini.

Demi-espace

Caractérisation

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$. Soit A un point de $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}$ permet de définir deux demi-espaces ouverts (respectivement fermés) respectivement définis par les inéquations :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} > 0 \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} < 0$$
$$(\text{respectivement : } \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} \geq 0 \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} \leq 0)$$

Inéquation cartésienne

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace d'équation $ax+by+cz+d=0$.

Les demi-espaces ouverts (respectivement fermés) définis par $\mathscr{P}$ admettent pour inéquations (cartésiennes) :

$$ax+by+cz+d > 0 \text{ et } ax+by+cz+d < 0$$
$$(\text{respectivement } ax+by+cz+d \geq 0 \text{ et } ax+by+cz+d \leq 0)$$

Sphère

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

La sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[\mathrm{AB}]$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$:

$$\mathscr{S} = \left\{ \mathrm{M} \in \mathscr{E} \,/\, \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \right\}$$

Distance d'un point à un plan

Définition

Soit M et $\mathscr{P}$ respectivement un point et un plan de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

On appelle « distance du point M au plan $\mathscr{P}$, notée $d(\mathrm{M},\mathscr{P})$, la distance MH :

$$d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \mathrm{MH}$$

Expression dans un repère orthonormal

<u>On suppose que l'espace est rapporté à un repère orthonormal.</u>

Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M}, z_\mathrm{M})$ et $\mathscr{P}$ respectivement un point et un plan de l'espace.
Soit : $ax + by + cz + d = 0$ une équation de $\mathscr{P}$ dans le repère considéré.

On a alors :

$$d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \frac{|ax_\mathrm{M} + by_\mathrm{M} + cz_\mathrm{M} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$