Synthèse de cours (Terminale S)

→ Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On dira que « la fonction *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) » s'il existe un réel A tel que l'intervalle $\left]\text{A};+\infty\right[$ (resp. $\left]-\infty;\text{A}\right[$) soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Cas d'une limite finie

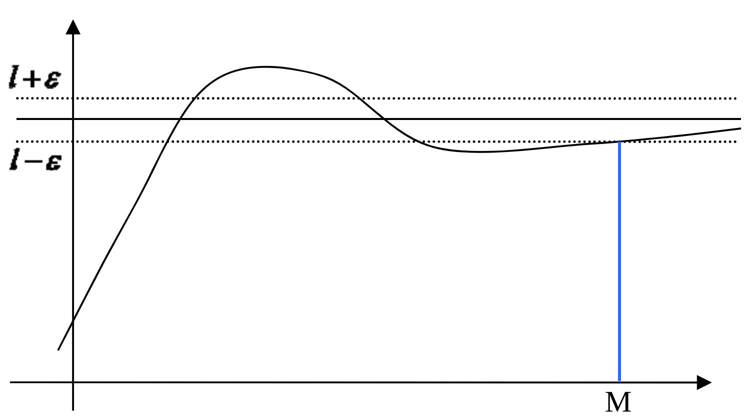
Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sur $\left]\text{A};+\infty\right[$ (resp. $\left]-\infty;\text{A}\right[$).

On dira que « la fonction *f* admet une limite *l* en $+\infty$ (resp. $-\infty$) » si, pour tout intervalle de la forme $\left]l-\varepsilon;l+\varepsilon\right[$ ($\varepsilon>0$), il existe un réel M de $\left]\text{A};+\infty\right[$ (resp. de $\left]-\infty;\text{A}\right[$) tel que pour tout *x* supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x)\in\left]l-\varepsilon;l+\varepsilon\right[$. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} f(x)=l$$

Interprétation géométrique (voir ci-dessous) : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction *f* admet au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) une <u>asymptote horizontale</u> d'équation $y=l$.



Exemples classiques (à connaître parfaitement !) :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-a} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0 .$$

Cas d'une limite infinie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On dira que « la fonction *f* admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) » si, pour tout réel B, il existe un réel M de $\mathcal{D}_f$ tel que pour tout *x* supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x) > \text{B}$.

On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp.} -\infty)}} f(x) = +\infty$$

Interprétation de la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: pour tout réel (sous-entendu arbitrairement grand), il existe une valeur de l'ensemble de définition de la fonction au-delà de laquelle <u>toutes les valeurs</u> prises par la fonction seront supérieures au réel considéré (de fait, une telle fonction ne sera pas majorée !). Attention ! Ce qui précède n'implique en rien que la fonction soit croissante ! On pourra par exemple considérer, pour s'en convaincre, la fonction :

$x \mapsto 2x + 5 - 7\dfrac{\sin x}{x}$.

Remarque : on adapte facilement la définition ci-dessus pour une fonction admettant $-\infty$ comme limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Notion d'asymptote oblique (hors programme)

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

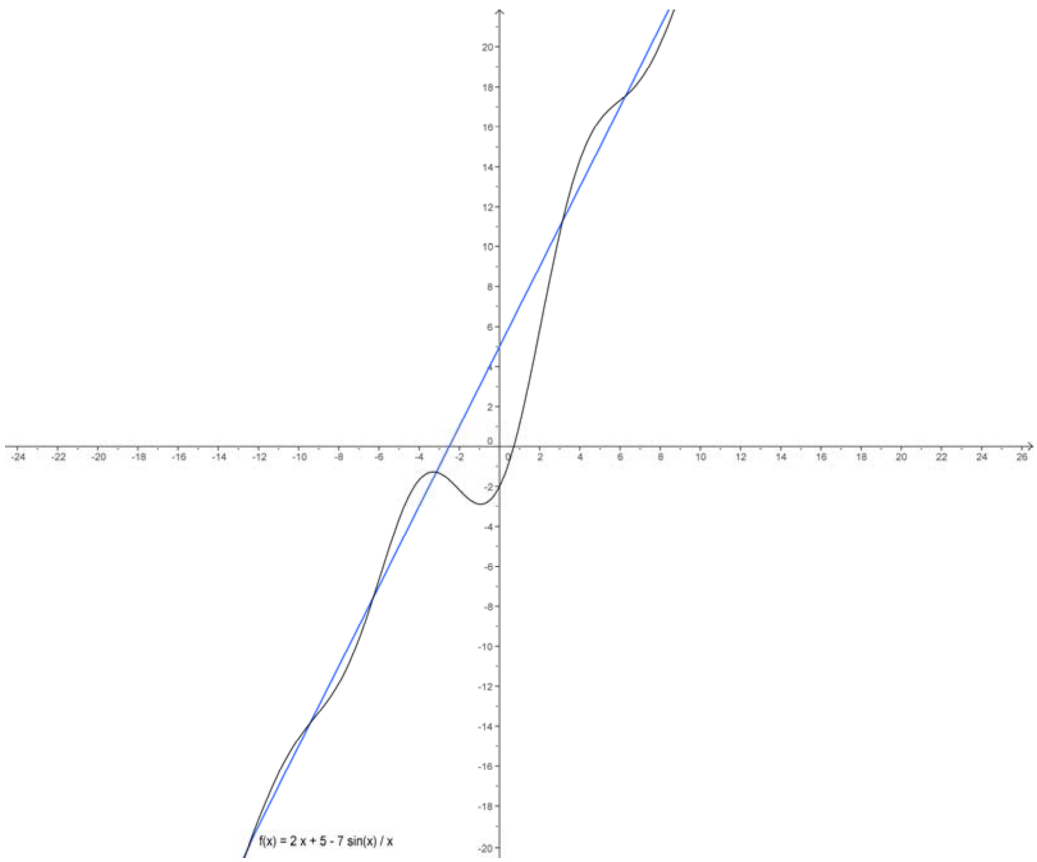
On dira que « la fonction *f* admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ » (ou que « la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ») si on a :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp.} -\infty)}} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

Remarques :

- Lorsqu'elle existe, l'asymptote est unique !
- Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$ (cette étude se fait, à priori, sur $\mathcal{D}_f$).

  Attention ! Ce signe n'a aucun raison d'être constant. La fonction ci-dessus admet la droite d'équation $y = 2x+5$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ mais la différence change périodiquement de signe … (cf. la figure ci-dessous)



La fonction $f : x \mapsto 2x+5-7\dfrac{\sin x}{x}$ *et son asymptote oblique d'équation* $y = 2x+5$.

Limite d'une fonction en un réel

Cas d'une limite finie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et soit *a* un réel.

On suppose qu'il existe un réel strictement positif *r* tel que $]a-r\,;a+r[-\{a\}\subset\mathcal{D}_f$ (on note que la fonction *f* n'est pas nécessairement définie en *a*. On dit que « *f* est définie dans un voisinage de *a* sans nécessairement être définie en *a* »).

On dira que « la fonction *f* admet une limite finie *l* en *a* » si pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x\in]a-\alpha\,;a+\alpha[\cap(]a-r\,;a+r[-\{a\})$ alors on aura $f(x)\in]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[$. On écrit alors :

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

Exemples classiques : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, … (On notera que ces limites correspondent en fait à des nombres dérivés).

Remarques :

- On définira de façon similaire les (éventuelles) limites à droite et à gauche de *f* en *a*. On écrira alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ pour la limite à gauche.

  Par exemple, la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ admet une limite à droite en $a=2$ mais n'admet pas de limite à gauche en ce réel.

  On remarquera également que l'existence de ces deux limites n'implique en rien leur égalité (considérer la fonction partie entière en un réel $a\in\mathbb{Z}$).
- Enfin, on peut avoir $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\neq f(a)$.

Cas d'une limite infinie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et soit *a* un réel.

On suppose qu'il existe un réel strictement positif *r* tel que $]a-r\,;a+r[-\{a\}\subset\mathcal{D}_f$ (comme précédemment, la fonction *f* n'est pas nécessairement définie en *a*.)

On dira que « la fonction *f* admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en *a* » si pour tout réel B, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x\in]a-\alpha;a+\alpha[\cap(]a-r;a+r[-\{a\})$ alors on aura $f(x)>\mathrm{B}$ (resp. $f(x)<\mathrm{B}$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$

Remarque : comme précédemment, on peut « seulement » avoir une limite infinie à gauche et/ou à droite de a. On considèrera, à titre d'illustration, l'exemple suivant : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Interprétation géométrique. Si f admet un limite infinie en a (resp. à gauche, à droite), on dit que « la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet en a (resp. à gauche de a, à droite de a) une <u>asymptote verticale</u> d'équation $x=a$ ».

Exemples classiques (à connaître parfaitement !) :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{1}{x-a} = -\infty,\ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{1}{x-a} = +\infty,\ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a\\ (\text{ou } x>a)}} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

Calcul de limites

Opérations et limites

Conventions de calcul

Pour simplifier certains calculs de limites, on introduit les « nombres » $-\infty$ et $+\infty$ avec les règles de calcul suivantes :

<u>Addition</u>

- $+\infty+(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty+(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(+\infty)=+\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(-\infty)=-\infty$;
- Opposé : $-(+\infty)=-\infty$ et $-(-\infty)=+\infty$.

→ le calcul « $+\infty-(+\infty)$ » n'est pas défini.

<u>Multiplication</u>

- $+\infty\times(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(-\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(+\infty)=+\infty\times(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(+\infty)=+\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(+\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(-\infty)=-\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(-\infty)=+\infty$;
- Inverse : $\dfrac{1}{+\infty}=0$ et $\dfrac{1}{-\infty}=0$.

→ Les calculs « $0\times(+\infty)$ » et « $0\times(-\infty)$ » ne sont pas définis. Il en découle que les calculs « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » ne le sont pas également.

→ Le calcul « $\frac{0}{0}$ » n'est pas défini. De façon plus générale, lorsque le dénominateur du rapport de deux fonctions tend vers 0, on se demandera si le signe reste constant (limite de type 0^+ ou 0^-) ou pas (il n'y a aucune raison que ce soit le cas et on pourra considérer la fonction $x\mapsto\frac{1}{(-1)^{\mathrm{E}(x)}\times\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ pour s'en convaincre.).

Pour simplifier certains énoncés (voir ci-après), on peut poser : $\boxed{\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}}$

Opérations et limites

<u>A partir des conventions de calcul ci-dessus</u>, on peut formellement écrire :

Soit *f* et *g* deux fonctions définies dans un voisinage de *a* (pas nécessairement en *a*), $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $k\in\mathbb{R}$.
Alors :

$$\lim_{x\to a}(kf)(x)=k\lim_{x\to a}f(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

Lorsque l'on est confronté à une situation « interdite » (cf. les calculs non définis ci-dessus), on dit que l'on a affaire à une « **forme indéterminée** ».

On retiendra les quatre types fondamentaux de formes indéterminées :

« $\infty-\infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0\times\infty$ »

Comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;A[$) est inclus dans $\mathcal{D}_f$ et dans $\mathcal{D}_g$.
- Pour tout réel $x > A$ (resp. $x < A$), on a : $g(x) \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq g(x)$).

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\text{(resp. } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{)}$$

On a également le théorème suivant communément appelé « théorème des gendarmes » :

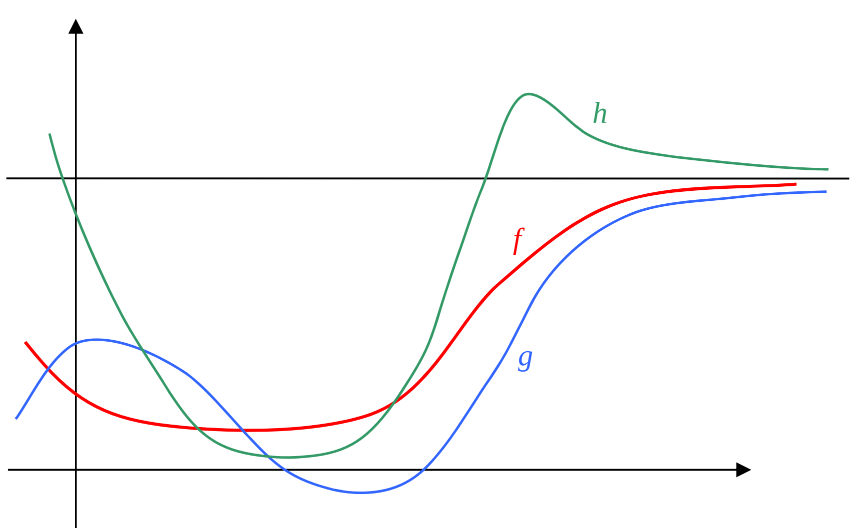
Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;A[$) est inclus dans $\mathcal{D}_f$, dans $\mathcal{D}_g$ et dans $\mathcal{D}_h$.
- Pour tout réel $x > A$ (resp. $x < A$), on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$
$$\text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \text{)}.$$



Théorème des gendarmes.
Exemple de courbes représentatives des fonctions f (rouge), g (bleu) et h (vert).

Limite d'une fonction composée

Composée de deux fonctions

Soit *f* et *g* deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
On suppose que l'image de $\mathcal{D}_f$ par la fonction *f* est incluse dans $\mathcal{D}_g$. Pour tout réel *x* de $\mathcal{D}_f$ on peut alors considérer le réel $g\left(f\left(x\right)\right)$. On définit ainsi une nouvelle fonction sur $\mathcal{D}_f$ appelée « fonction composée de *f* par *g* » et notée $g\circ f$:

$$\forall x\in\mathcal{D}_f, \left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$$

Théorème

Soit *f* et *g* deux fonctions.
Soit *a*, *b* et *l* trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que :

- La fonction *f* est définie dans un voisinage de *a* et $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=b$;
- La fonction *g* est définie dans un voisinage de *b* et $\lim\limits_{X\to b} g\left(X\right)=l$.

Alors on a :

$$\lim_{x\to a}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=l$$

Exemples :

→ On cherche : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4x^4-5x+23}{7x^4-5}}$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{\dfrac{4x^4-5x+23}{7x^4-5}}$ peut être considérée comme la composée de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{4x^4-5x+23}{7x^4-5}$ et de la fonction $g:X\mapsto\sqrt{X}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^4-5x+23}{7x^4-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^4}{7x^4}=\dfrac{4}{7}$. On cherche alors : $\lim\limits_{X\to\frac{4}{7}} g\left(X\right)$.

On a : $\lim\limits_{X\to\frac{4}{7}} g\left(X\right)=\lim\limits_{X\to\frac{4}{7}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{4}{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4x^4-5x+23}{7x^4-5}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$

→ On cherche : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[5\cos(2x)+7\cos x-3\right]$.

On peut écrire : $5\cos(2x)+7\cos x-3=5\left(2\cos^2(x)-1\right)+7\cos x-3=10\cos^2(x)+7\cos x-8$.

La fonction $x\mapsto 5\cos(2x)+7\cos x-3$ peut alors être considérée comme la composée des fonctions : $f:x\mapsto\cos x$ et $g:X\mapsto 10X^2+7X-8$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$. On cherche alors : $\lim\limits_{X\to 0} g(X)$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{X\to 0} g(X)=\lim\limits_{X\to 0}\left(10X^2+7X-8\right)=-8$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[5\cos(2x)+7\cos x-3\right]=-8}$.

Fonctions polynômes et rationnelles (hors programme)

Le cas des fonctions polynômes

Soit *f* une fonction polynôme.
La limite en $\pm\infty$ de *f* est la limite correspondante du terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+5x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right)=-\infty$

Le cas des fonctions rationnelles

Soit *f* une fonction rationnelle.
La limite en $\pm\infty$ de *f* est la limite correspondante du rapport des termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x+7}{5x^3-6x+11}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{5x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x+7}{3x^3-2x+11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+6x^3-5x+23}{3x^3-5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}x=-\infty$$