Synthèse de cours (CPGE)
→ Lois de composition internes et externes

Lois de composition internes

Définitions

Loi de composition interne (LCI)

Soit E un ensemble. On appelle « loi de composition interne (LCI) sur E » toute application de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ dans E :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\times\mathrm{E} &\to \mathrm{E}\\(x,y)&\mapsto x*y\end{aligned}$$

Remarque :

Traditionnellement, et sans précision ou contexte particulier, une LCI est notée * comme ci-dessus ou $\top$ ("truc"). On peut également adopter un formalisme additif (la LCI est alors notée +) ou multiplicatif ($\times$ ou .).

Partie stable par une LCI, loi induite

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.
Soit F une partie de E.

On dit que « F est stable par * » si :

$$\forall (x,y)\in\mathrm{F}^2,\ x*y\in\mathrm{F}$$

Si F est une partie stable par *, alors la restriction de * à F est une loi de composition interne sur F dite « loi induite par * dans F ».

Elément neutre à gauche, neutre à droite, élément neutre

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

On dit que l'élément e de E est un élément :

- « neutre à gauche » si : $\forall x \in \mathrm{E},\ e * x = x$;
- « neutre à droite » si : $\forall x \in \mathrm{E},\ x * e = x$;
- « neutre » si e est neutre à gauche et à droite : $\forall x \in \mathrm{E},\ e * x = x * e = x$.

Symétrique à gauche, symétrique à droite, symétrique

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

On suppose que $(\mathrm{E}, *)$ possède un élément neutre e.

On dit que l'élément x de E possède :

- « un symétrique à gauche x_g » si : $x_g * x = e$. On dit alors que « x est symétrisable à gauche » ;
- « un symétrique à droite x_d » si : $x * x_d = e$. On dit alors que « x est symétrisable à droite » ;
- « un symétrique x' » si : $x' * x = x * x' = e$. On dit alors que « x est symétrisable ».

Distributivité

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes * et $\top$.

On dit que $\top$ est :

- « distributive à gauche par rapport à * » si on a :
$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z)$$
- « distributive à droite par rapport à * » si on a :
$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ (y * z) \top x = (y \top x) * (z \top x)$$
- « distributive par rapport à * » si elle distributive à gauche et à droite par rapport à *.

Propriétés

Propriétés de la loi de composition interne

Commutativité

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

On dit que « * est commutative » si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x * y = y * x$$

Associativité

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

On dit que « * est associative » si :

$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ (x * y) * z = x * (y * z)$$

Propriété de l'élément neutre

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

Si $(\mathrm{E}, *)$ possède un élément neutre **alors** il est unique.

Remarques :

1. Lorsque la loi est notée additivement, l'élément neutre est noté « 0 » ;
2. Lorsque la loi est notée multiplicativement, l'élément neutre est noté « 1 ».

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

Si $(\mathrm{E}, *)$ possède un élément neutre à gauche et un élément neutre à droite **alors** ils sont égaux et il s'agit de l'élément neutre de E.

Propriété des éléments symétriques

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne *.

On suppose que $(\mathrm{E},*)$ possède un élément neutre e et que la loi * est associative.

Si un élément x de E possède un symétrique à gauche et un symétrique à droite **alors** ils sont égaux.

Si un élément x de E est symétrisable **alors** il admet un unique symétrique.

Remarques :

1. Lorsque la loi est notée additivement, le symétrique s'il existe, est appelé « opposé » et est noté « $-x$ » ;
2. Lorsque la loi est notée multiplicativement, le symétrique, s'il existe, est appelé « inverse » et est noté « x^{-1} » ;

Loi de composition externe

Définitions

Loi de composition externe (LCE)

Soit E et X des ensembles. On appelle « loi de composition externe (LCE) sur E » toute application de $\mathrm{X}\times\mathrm{E}$ dans E :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}\times\mathrm{E} &\rightarrow \mathrm{E} \\ (\alpha,x) &\mapsto \alpha \perp x \end{aligned}$$

Dans ce cadre général, les éléments de X sont appelés « opérateurs » et on dit que « E est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans X ».

Remarque : la loi peut être notée multiplicativement à l'aide d'un point.

Partie stable par une LCE, loi induite

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition externe $\perp$ à opérateurs dans X.
Soit F une partie de E.

On dit que « F est stable par $\perp$ » si :

$$\forall \alpha \in \mathrm{X}, \forall x \in \mathrm{F}, \ \alpha \perp x \in \mathrm{F}$$

Si F est une partie stable par $\perp$, alors la restriction de $\perp$ à F est une loi de composition externe sur F dite « loi induite par $\perp$ dans F ».

Distributivité

Soit E un ensemble muni :

- D'une loi de composition interne * ;
- D'une loi de composition externe $\perp$ à opérateurs dans X.

On dit que « la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi * » si :

$$\forall \alpha \in \mathrm{X}, \ \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \alpha \perp (x * y) = (\alpha \perp x) * (\alpha \perp y)$$