Synthèse de cours PanaMaths
→ Fonctions hyperboliques réciproques

Définition

Les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définissent deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction cosinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$. On peut donc définir les fonctions réciproques correspondantes :

- La fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique est appelée « argument sinus hyperbolique » et est notée $\arg\sinh$ (ou $\arg\mathrm{sh}$). Pour tout réel *x*, on a :

$$y=\sinh(x)\Leftrightarrow x=\arg\sinh(y)$$

- La fonction réciproque de la fonction cosinus hyperbolique est appelée « argument cosinus hyperbolique » et est notée $\arg\cosh$ (ou $\arg\mathrm{ch}$). Pour tout réel positif *x*, on a :

$$y=\cosh(x)\Leftrightarrow x=\arg\cosh(y)$$

- La fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique est appelée « argument tangente hyperbolique » et est notée $\arg\tanh$ (ou $\arg\mathrm{th}$). Pour tout réel *x*, on a :

$$y=\tanh(x)\Leftrightarrow x=\arg\tanh(y)$$

Expressions à l'aide du logarithme népérien

Pour tout réel *x*, on a :

$$\arg\sinh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\arg\tanh(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Pour tout *x* réel supérieur à 1, on a :

$$\arg\cosh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Parité

Les fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique sont impaires.

Continuité

Les fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction argument cosinus hyperbolique est continue sur $[1\,;+\infty[$.

Limites

$$\lim_{x\to-\infty} \arg\sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \arg\sinh(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \arg\cosh(x) = \arg\cosh(1) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \arg\cosh(x) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \arg\tanh(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \arg\tanh(x) = +\infty$$

Equivalences

$$\arg\sinh(x) \underset{+\infty}{\sim} \arg\cosh(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$$
$$\arg\sinh(x) \underset{-\infty}{\sim} -\ln(-x)$$

Sens de variation

Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs.

Dérivées

La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout réel x :

$$\arg\sinh'(x) = \frac{d \arg\sinh}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

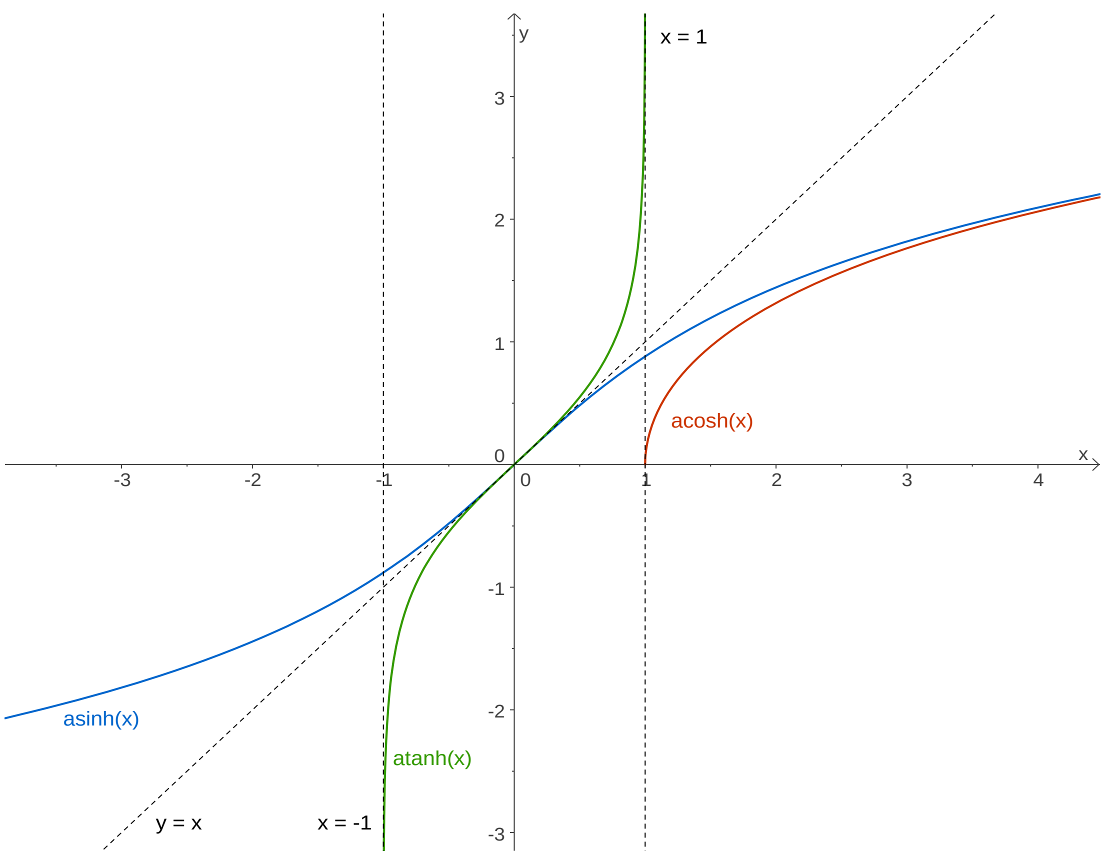
La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on a, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$\arg\cosh'(x) = \frac{d \arg\cosh}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a, pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1 :

$$\arg\tanh'(x) = \frac{d \arg\tanh}{dx}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Courbes représentatives



Remarque : sur la figure ci-dessus, on a fait apparaître :

- Les deux asymptotes verticales (à la courbe représentative de la fonction argument tangente hyperbolique) d'équations $x = -1$ et $x = 1$, la seconde étant également le support de la demi-tangente verticale à la courbe représentation de la fonction argument cosinus hyperbolique au point $(1\,;0)$.
- La tangente, d'équation $y = x$, à l'origine aux courbes représentatives des fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique.