Définition

La fonction sinus définit une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans l'intervalle $[-1;+1]$, la fonction cosinus définit une bijection de l'intervalle $[0;\pi]$ dans l'intervalle $[-1;+1]$ et la fonction tangente définit une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

On peut donc définir les fonctions réciproques correspondantes :

- La fonction réciproque de la fonction sinus est appelée « arc sinus » et est notée $\arcsin$. Pour tout réel *x* dans l'intervalle $[-1;+1]$, on a :

$$y=\arcsin(x) \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(y)=x$$

- La fonction réciproque de la fonction cosinus est appelée « arc cosinus » et est notée $\arccos$. Pour tout réel *x* dans l'intervalle $[-1;+1]$, on a :

$$y=\arccos(x) \Leftrightarrow y \in [0;\pi] \text{ et } \cos(y)=x$$

- La fonction réciproque de la fonction tangente est appelée « arc tangente » et est notée $\arctan$. Pour tout réel *x*, on a :

$$y=\arctan(x) \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan(y)=x$$

Remarque : en tenant compte du fait que les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi-$périodiques et respectivement impaire et paire et du fait que la fonction tangente est $\pi-$périodique, il vient :

$$x=\sin y \Leftrightarrow y=\arcsin x+2k\pi \text{ ou } y=\pi-\arcsin x+2k\pi$$
$$x=\cos y \Leftrightarrow y=\pm\arccos x+2k\pi$$
$$x=\tan y \Leftrightarrow y=\arctan x+k\pi$$

k étant un entier

Parité

Les fonctions arc sinus et arc tangente sont impaires sur leurs domaines de définition respectifs.

Continuité

Les fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.

Limites

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Equivalences

$$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} \arctan(x) \underset{0}{\sim} x$$

Sens de variation

Les fonctions arc sinus et arc tangente sont strictement croissantes sur leurs domaines de définition respectifs.
La fonction arc cosinus est strictement décroissante sur son domaine de définition.

Dérivées

La fonction arc sinus est dérivable sur $]-1;+1[$ et on a, pour tout réel x dans cet intervalle :

$$\arcsin'(x)=\frac{d\arcsin}{dx}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

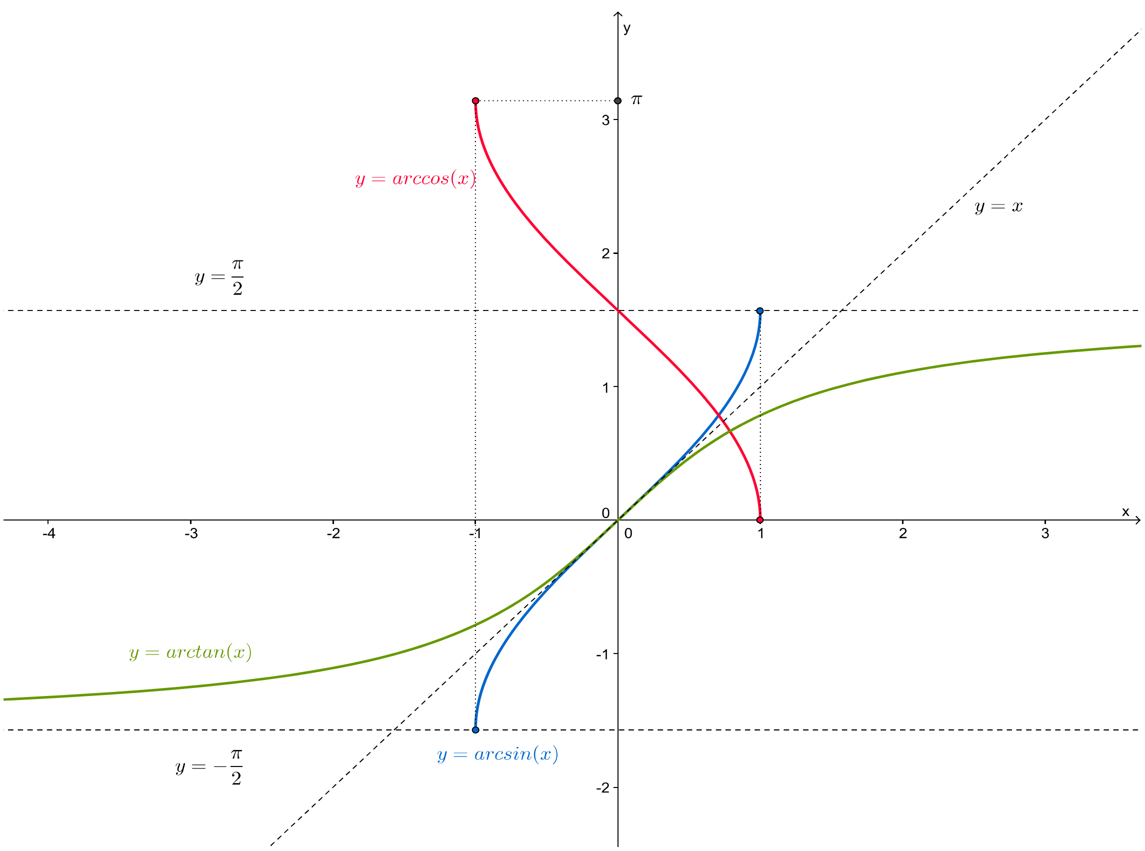
La fonction arc cosinus est dérivable sur $]-1;+1[$ et on a, pour tout réel x de cet intervalle :

$$\arccos'(x)=\frac{d\arccos}{dx}(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout réel x :

$$\arctan'(x)=\frac{d\arctan}{dx}(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Courbes représentatives



Remarque : sur la figure ci-dessus, on a fait apparaître :

- Les deux asymptotes horizontales (à la courbe représentative de la fonction arc tangente) d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
- La tangente, d'équation $y = x$, à l'origine aux courbes représentatives des fonctions arc sinus et arc tangente.

Relations remarquables

Pour tout réel *x* de l'intervalle $[-1;+1]$, on a :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Pour tout réel *x* <u>non nul</u>, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \times \frac{\pi}{2}$$

avec $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.