Article PanaMaths
→ Les intégrales et la formule de Wallis

Introduction

John Wallis (Ashford 1616 – Oxford 1703) est un mathématicien anglais. Son éducation fut d'abord religieuse (il sera ordonné prêtre en 1640) mais à partir de quinze ans, il étudia, avec talent, les mathématiques et, plus généralement, les sciences. A partir de 1649, il exercera la fonction de professeur à l'université d'Oxford et ce, jusqu'à sa mort.

Il est l'un des membres fondateurs de la fameuse Royal Society (1663).

On lui doit le symbole « ∞ » pour désigner une quantité infinie (la hiérarchie des infinis ne sera étudiée qu'au 19ème siècle).

Le $17^{\text{ème}}$ siècle, en particulier grâce à Cavalieri, verra la théorie de l'intégration se construire progressivement. Les motivations sont principalement le calcul d'aires et de volumes, les difficultés principales, la définition et l'utilisation correctes d'infiniment petits. Wallis y apportera une contribution significative et préparera ainsi l'avènement du calcul infinitésimal de Newton.

Calcul des valeurs exactes

Définition-théorème

Pour tout entier naturel *n*, on appelle « intégrale de Wallis » l'intégrale définie suivante :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$$

Pour établir l'égalité des deux intégrales, il suffit de considérer le changement de variable bijectif φ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans lui-même défini par :

$$\varphi : u \mapsto \varphi(u) = \frac{\pi}{2} - u = t$$

En tenant compte de $dt = \varphi'(u)\,du = -du$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du$$

Comme : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin(u)$, on a : $\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin^n(u)$ puis

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(u)\,du$.

L'égalité est ainsi établie.

Calculs des premiers termes

On a facilement :

$$W_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$$W_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^1(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,dt=\left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1$$

$$\boxed{W_0=\frac{\pi}{2},\ W_1=1}$$

Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}W_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\cos^n(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\sin^2(t)\right]\cos^n(t)\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^n(t)\,dt\\&=W_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\times\sin(t)\cos^n(t)\,dt\end{aligned}$$

Pour calculer la deuxième intégrale, nous allons procéder à une intégration par parties.

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Sa dérivée, la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $t\mapsto\sin(t)\cos^n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Elle est donc continue sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Elle y admet pour primitive la fonction : $t\mapsto-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t)$.

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times\sin(t)\cos^n(t)\,dt &= \left[\sin(t)\times\left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\times\left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t)\right)dt \\ &= -\frac{1}{n+1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\cos^{n+1}(0)\right) \\ &\quad +\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}(t)\,dt \\ &= -\frac{1}{n+1}(1\times 0-0\times 1)+\frac{1}{n+1}W_{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1}W_{n+2}\end{aligned}$$

D'où :

$$W_{n+2} = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times\sin(t)\cos^n(t)\,dt = W_n - \frac{1}{n+1}W_{n+2}$$

On en tire : $\frac{1}{n+1}W_{n+2}+W_{n+2}=W_n$, soit $\frac{n+2}{n+1}W_{n+2}=W_n$ et, finalement : $W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n}$$

Expression de la valeur exacte

Soit n un entier pair : $n=2p$.

D'après la relation précédente, on a :

$$\begin{aligned}W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4} \\ &= \ldots \\ &= \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}W_2 \\ &= \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}W_0 \\ &= \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}&=\frac{2p\times(2p-1)\times(2p-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{\left[2p\times(2p-2)\times(2p-4)\ldots\times 4\times 2\times 1\right]^2}\\&=\frac{(2p)!}{\left[2p\times 2(p-1)\times 2(p-2)\ldots\times 2\times 2\times 2\times 1\right]^2}\\&=\frac{(2p)!}{\left[2^p\times p\times(p-1)\times(p-2)\ldots\times 2\times 1\right]^2}\\&=\frac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$W_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}$$

Soit maintenant n un entier impair : $n=2p+1$.

En procédant de façon analogue à ce qui vient d'être fait, on obtient :

$$\begin{aligned}W_{2p+1}&=\frac{2p}{2p+1}W_{2p-1}\\&=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}W_{2p-3}\\&=\ldots\\&=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}W_3\\&=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}W_1\\&=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}&=\frac{\left[2p\times 2(p-1)\times 2(p-2)\times\ldots\times 2\times 2\times 2\times 1\right]^2}{(2p+1)\times 2p\times(2p-1)\times(2p-2)\ldots\times 5\times 4\times 3\times 2}\\&=\frac{\left[2^p\times p\times(p-1)\times(p-2)\ldots\times 2\times 1\right]^2}{(2p+1)!}\\&=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\end{aligned}$$

Finalement :

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

Comportement asymptotique

La suite (W_n) est à termes strictement positifs

La fonction cosinus prend des valeurs positives sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; la fonction $x \mapsto x^n$ prend des valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit ainsi que la composée $x \mapsto \cos^n(x)$ prend des valeurs positives sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right] \subset \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, il vient alors : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t)\,dt$.

Comme on a $\cos(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et comme la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier naturel *n*, on a : $\cos^n(t) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ et donc

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t)\,dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\,dt = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^{\frac{n}{2}+2}} > 0$. On a ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t)\,dt > 0$.

Par ailleurs, on vient de voir que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t)\,dt$. Il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t)\,dt > 0$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0}$$

Monotonie de la suite (W_n)

Comme on s'intéresse à la monotonie de la suite (W_n), on peut tirer parti de la linéarité de l'intégrale. Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left[\cos(t) - 1\right] dt \end{aligned}$$

On a vu précédemment que la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ prenait des valeurs positives sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, -1 \le \cos(t) \le 1$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}, -2 \le \cos(t) - 1 \le 0$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)\left[\cos(t)-1\right]$ prend des valeurs négatives sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et on en déduit immédiatement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left[\cos(t)-1\right] dt \le 0$$

Soit : $W_{n+1} - W_n \le 0$ et on conclut :

La suite (W_n) est décroissante.

Limite du rapport $\frac{W_{n-1}}{W_n}$

La suite (W_n) est décroissante, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2, on a :

$$W_n \le W_{n-1} \le W_{n-2}$$

Or, on a vu précédemment que la suite (W_n) était une suite à termes strictement positifs. On en déduit, en divisant par W_n :

$$1 \le \frac{W_{n-1}}{W_n} \le \frac{W_{n-2}}{W_n}$$

D'après la relation de récurrence obtenue plus haut, on peut écrire, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2 :

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

Soit : $\dfrac{W_{n-2}}{W_n} = \dfrac{n}{n-1}$.

La double inégalité obtenue précédemment se récrit alors :

$$1 \le \frac{W_{n-1}}{W_n} \le \frac{n}{n-1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$, on en déduit immédiatement (théorème des gendarmes) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} = 1}$$

Une belle égalité

Les expressions exactes de W_{2p} et W_{2p+1} obtenues à la fin de la partie précédente présentes de fortes similitudes (comparer le numérateur de l'une avec le dénominateur de l'autre …). On est ainsi conduit à considérer le produit $W_{n-1}W_n$.

Si *n* est pair non nul : $n = 2p$ ($p \ne 0$), on a :

$$\begin{aligned}
W_{n-1}W_n &= W_{2p-1}W_{2p} \\
&= \frac{2^{2(p-1)}\left((p-1)!\right)^2}{\left(2(p-1)+1\right)!} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\cancel{2^{2p}}\,2^{-2}\left((p-1)!\right)^2(2p)!}{(2p-1)!\,\cancel{2^{2p}}\,(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2^{-2}\cancel{\left((p-1)!\right)^2}\,2p\,\cancel{(2p-1)!}}{\cancel{(2p-1)!}\,p^2\cancel{\left((p-1)!\right)^2}}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2p} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On procède de façon tout à fait similaire avec n impair : $n = 2p+1$. On a :

$$\begin{aligned}
W_{n-1}W_n &= W_{2p}W_{2p+1} \\
&= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}\times\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{\cancel{(2p)!}\,\cancel{2^{2p}}\,\cancel{(p!)^2}}{\cancel{2^{2p}}\,\cancel{(p!)^2}\,(2p+1)\times\cancel{(2p)!}}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2p+1}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{n}\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On a donc, finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}}$$

Un équivalent en $+\infty$

Pour tout entier naturel n non nul, on a, d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n = nW_n^2\times\frac{W_{n-1}}{W_n}$$

Soit : $nW_n^2 = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{W_{n-1}}{W_n}}$.

Mais on a vu que l'on avait : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{W_{n-1}}{W_n} = 1$. On en déduit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{W_{n-1}}{W_n}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}} = 1$.

La fonction racine carrée étant continue en 1, on en tire : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{W_n^2}{\dfrac{\pi}{2n}}}=\sqrt{1}=1$.

Comme $W_n>0$, on a : $\sqrt{\dfrac{W_n^2}{\dfrac{\pi}{2n}}}=\dfrac{W_n}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ et, finalement : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{W_n}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}=1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{W_n}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}=1\text{, soit } W_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

La formule de Wallis

Rappelons que l'on a :

$$W_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1 \text{ et } W_{2p}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}&=\frac{\dfrac{2p}{2p+1}\times\dfrac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2p-1}{2p}\times\dfrac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\left[2p\times(2p-2)\times(2p-4)\times\ldots\times 4\times 2\right]^2}{(2p+1)\times(2p-1)^2\times(2p-3)^2\times\ldots\times 5^2\times 3^2\times 1}\times\frac{2}{\pi}\\
&=\frac{\left[2p\times(2p-2)\times(2p-4)\times\ldots\times 4\times 2\right]^2}{\left[(2p+1)\times(2p-1)\right]\times\left[(2p-1)\times(2p-3)\right]\times\ldots\times[5\times 3]\times[3\times 1]}\times\frac{2}{\pi}\\
&=\frac{\left[2p\times(2p-2)\times(2p-4)\times\ldots\times 4\times 2\right]^2}{\left[(2p+1)\times(2p-1)\right]\times\left[((2p-2)+1)\times((2p-2)-1)\right]\times\ldots\times\left[(2+1)\times(2-1)\right]}\times\frac{2}{\pi}\\
&=\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right)\times\frac{2}{\pi}\\
&=\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\times\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$, on en déduit finalement : $\lim\limits_{p\to+\infty} \prod_{k=1}^{p} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$. Soit :

$$\boxed{\pi = 2\times\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\times\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2k}{2k+1}\right) = 2\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots}$$

Cette formule est encore appelée « produit de Wallis ».

Remarques :

- Wallis est le premier à avoir écrit π sous la forme d'un produit infini de nombres rationnels.
- La convergence est très lente (essayez !) et cette formule, aussi esthétique soit-elle, n'est pas utile pour le calcul effectif et efficace des décimales de π.
- On peut, toujours à partir des intégrales de Wallis et en arrangeant différemment les facteurs dans les expressions de W_{2p} et W_{2p+1}, obtenir des variantes de la formule de Wallis.
  Par exemple :

$$\begin{aligned}
\pi &= 2\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots \\
&= 4\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots \\
&= 4\times\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\times\frac{2k+2}{2k+1}\right) \\
&= 4\times\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(2k+1)-1}{2k+1}\times\frac{(2k+1)+1}{2k+1}\right) \\
&= 4\times\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2} \\
&= 4\times\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) \\
&= 4\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\times\ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{\pi = 4\times\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = 4\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\times\ldots}$$