Formulaire PanaMaths (CPGE)

Formules de Taylor

Dans ce document, on adopte la convention d'écriture : $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Formule locale : le développement de Taylor-Young

Soit *f* une application d'un intervalle *I* dans $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, dans un espace vectoriel normé *E*). Soit *a* un élément de *I*.

Si *f* est *n* fois dérivable en *a*, **alors** il existe un intervalle $J =]a-\alpha\,;a+\alpha[$ inclus dans *I* tel que pour tout *x* de $J\setminus\{a\}$ on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\times(x-a) + \frac{1}{2}\times f''(a)\times(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\times f^{(n)}(a)\times(x-a)^n + o\left[(x-a)^n\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\times f^{(k)}(a)\times(x-a)^k + o\left[(x-a)^n\right]$$

Remarque : $o\left[(x-a)^n\right] = (x-a)^n \times \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varepsilon(x) = 0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varepsilon(x) = 0_E$ dans le cas où *f* est à valeur dans un espace vectoriel normé *E*.

Formules globales

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit *f* une application d'un intervalle $I = [a\,;b]$ dans un espace vectoriel normé *E* et soit *n* un entier naturel non nul.

Si *f* est de classe $\mathscr{C}^n$ sur *I* et si la dérivée $f^{(n+1)}$ existe et est majorée sur $]a\,;b[$ ($\exists M > 0 \,/\, \forall x \in]a\,;b[,\ \left\|f^{(n+1)}(x)\right\| \leq M$), **alors** on a :

$$\left\| f(b) - f(a) - f'(a)\times(b-a) - \frac{1}{2}\times f''(a)\times(b-a)^2 - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{1}{n!}\times f^{(n)}(a)\times(b-a)^n \right\| = \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times f^{(k)}(a)\times(b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Formule de Taylor-Lagrange

Dans le cas où l'espace vectoriel normé E est $\mathbb{R}$, on peut préciser le résultat précédent. C'est la formule de Taylor-Lagrange.

Soit f une application d'un intervalle $I=[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et si $f^{(n+1)}$ existe sur $]a\,;b[$, **alors** il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que :

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a)+f'(a)\times(b-a)+\frac{1}{2}\times f''(a)\times(b-a)^2+\ldots\\ &\ldots +\frac{1}{n!}\times f^{(n)}(a)\times(b-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}\times(b-a)^{n+1}\times f^{(n+1)}(c)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times f^{(k)}(a)\times(b-a)^k+\frac{1}{(n+1)!}\times(b-a)^{n+1}\times f^{(n+1)}(c)\end{aligned}$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Toujours dans le cas où $E=\mathbb{R}$ et en ayant des hypothèses plus fortes sur f, on va pouvoir écrire le reste sous forme d'une intégrale.

Soit f une application d'un intervalle $I=[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I **alors** on a :

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a)+f'(a)\times(b-a)+\frac{1}{2}\times f''(a)\times(b-a)^2+\ldots\\ &\ldots +\frac{1}{n!}\times f^{(n)}(a)\times(b-a)^n+\int_a^b\frac{1}{n!}(b-t)^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times f^{(k)}(a)\times(b-a)^k+\int_a^b\frac{1}{n!}(b-t)^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$