Formulaire PanaMaths
Propriétés métriques des arcs paramétrés dans le plan

Dans ce document, le plan est associé au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et à la norme correspondante (norme euclidienne). On le rapporte alors à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce plan, on considère un arc paramétré $\Gamma=\left(\mathrm{I},\ f\right)$ régulier (on rappelle que la régularité de l'arc Γ équivaut à : $\forall t\in\mathrm{I},\ f'\left(t\right)\neq 0$. Ainsi, en tout point $\mathrm{M}=f\left(t\right)$ de Γ, le vecteur $\dfrac{f'\left(t\right)}{\left\|f'\left(t\right)\right\|}$ est un vecteur unitaire de la tangente à Γ).

Abscisse curviligne

Définition

Il s'agit d'une primitive sur I de $t\mapsto\left\|f'\left(t\right)\right\|$.

$$\boxed{\frac{ds}{dt}=\left\|f'\left(t\right)\right\|}$$

Note : l'abscisse curviligne est un changement de paramétrage admissible de Γ. Il est dit « normal » car pour tout *s*, le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{ds}$ est unitaire.

Longueur d'un arc

Soit M_1 et M_2 deux points de l'arc Γ de paramètres respectifs t_1 et t_2 et d'abscisse curviligne correspondante $s_1=s\left(t_1\right)$ et $s_2=s\left(t_2\right)$. La longueur algébrique $L\left(\overparen{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right)$ de la partie de l'arc Γ située entre les points M_1 et M_2 est donnée par :

$$\boxed{L\left(\overparen{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\right)=s_2-s_1=s\left(t_2\right)-s\left(t_1\right)=\int_{s_1}^{s_2}ds=\int_{t_1}^{t_2}\left\|f'\left(t\right)\right\|dt}$$

Repère de Frenet

On suppose dans cette partie que l'arc Γ est représenté par un paramétrage normal *s* (par exemple l'abscisse curviligne).

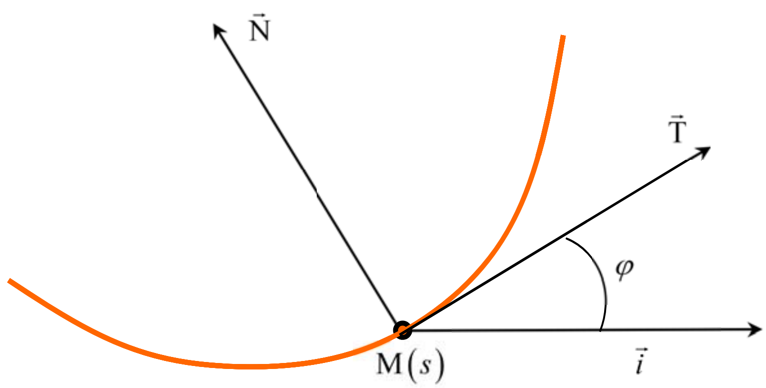
Pour tout point M d'abscisse curviligne s ($\mathrm{M}=\mathrm{M}(s)$), on définit le vecteur : $\vec{\mathrm{T}}=\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{ds}$ puis le vecteur $\vec{\mathrm{N}}$ comme l'image de $\vec{\mathrm{T}}$ par la rotation vectorielle d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\text{Le repère de Frenet en } \mathrm{M}(s) \text{ est le repère } \left(\mathrm{M}(s)\,;\vec{\mathrm{T}},\vec{\mathrm{N}}\right).}$$

En posant : $\varphi=\left(\vec{i},\vec{\mathrm{T}}\right)$ (voir la figure ci-dessous), on a, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$:

$$\boxed{\vec{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \text{ et } \vec{\mathrm{N}}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}}$$

On note ainsi que la matrice $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ à la base $\left(\vec{\mathrm{T}},\vec{\mathrm{N}}\right)$.



Remarque : de $\cos\varphi=\dfrac{dx}{ds}$ et $\sin\varphi=\dfrac{dy}{ds}$, on tire :

$$\boxed{\tan\varphi=\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'}{x'}}$$

Courbure

Dans cette partie on suppose que l'arc Γ est représenté par un paramétrage normal s (par exemple l'abscisse curviligne) et qu'il est au moins de classe $\mathscr{C}^2$.

Définitions

En notant $c = c(s)$ la courbure, on a :

$$\boxed{c = \frac{d\varphi}{ds}}$$

On en tire :

$$\frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds} = c\vec{\mathrm{N}} \text{ et } \frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = -c\vec{\mathrm{T}}$$

Si le point $\mathrm{M}(s)$ est birégulier ($\Leftrightarrow \vec{\mathrm{T}}$ et $\frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds}$ indépendants $\Leftrightarrow c \neq 0$) alors on peut définir le rayon de courbure $\mathrm{R}(s)$ en $\mathrm{M}(s)$ par :

$$\boxed{\mathrm{R}(s) = \frac{1}{c(s)}}$$

On appelle, en tout point $\mathrm{M}(s)$ birégulier, « cercle osculateur à Γ en $\mathrm{M}(s)$ » le cercle de centre Ω et de rayon $\mathrm{R}(s)$ où le point Ω est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega} = \mathrm{R}\vec{\mathrm{N}}}$$

Calcul en coordonnées cartésiennes

En notant $\mathrm{M}'(t) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}(t)$ et $\mathrm{M}''(t) = \frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}(t)$:

$$\boxed{c = \frac{\det\left(\mathrm{M}'(t), \mathrm{M}''(t)\right)}{\left\|\mathrm{M}'(t)\right\|^3}}$$

Calcul en coordonnés polaires

L'arc est ici défini par : $r = r(\theta)$.

$$\boxed{c = \frac{r^2 + 2r'^2 - 2rr''}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$