Formulaire PanaMaths (Terminale S)

Les complexes

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère <u>orthonormal</u> $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Le nombre *i*

$$\boxed{i^2=-1}$$

Formes d'un nombre complexe et représentation géométrique

Forme algébrique

$$\boxed{z=x+iy=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)}$$

Où $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ désignent respectivement la « partie réelle » et la « partie imaginaire » du nombre complexe *z*.

Forme trigonométrique

$$\boxed{z=r\cos\theta+ir\sin\theta}$$

Où $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ désigne le « module » du nombre complexe *z* et θ (défini modulo 2π) désigne son « argument » : $\arg(z)=\theta(2\pi)$ ou $\arg(z)=\theta$.

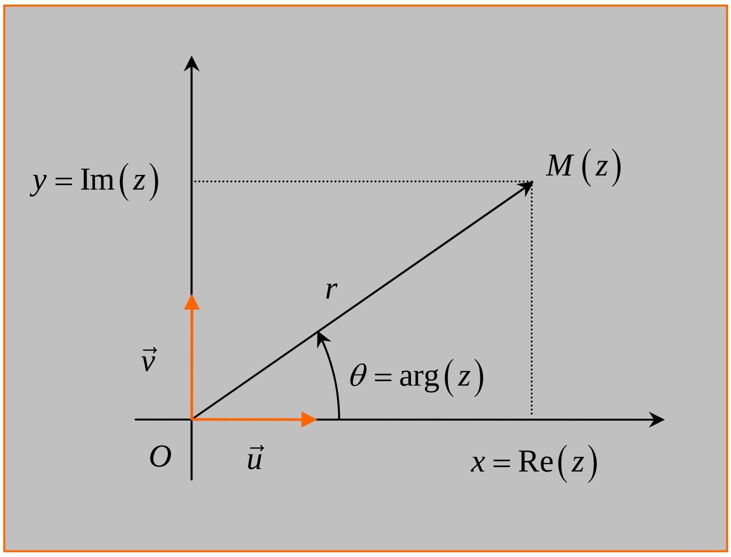
Forme complexe

$$\boxed{z=re^{i\theta}}$$

Représentation géométrique

Dans le plan complexe, à $z=x+iy$, on associe le point *M* de coordonnées $(x;y)$. On dit que le nombre complexe *z* est l'« affixe » du point *M*.

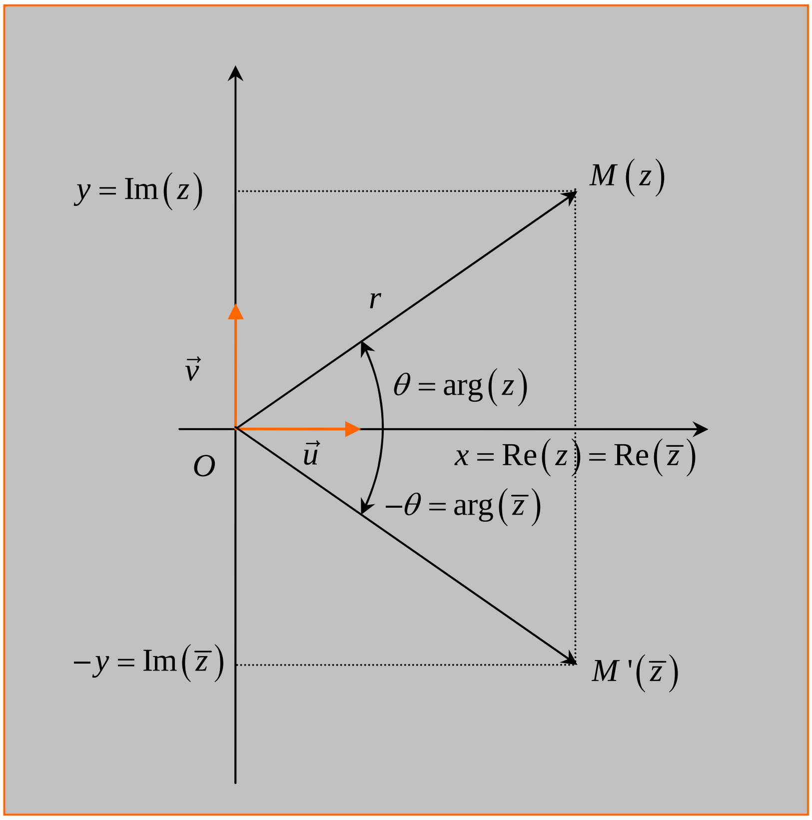
$$r=|z|=OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \text{ et } \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=\arg(z)=\theta$$



Conjugaison

Définition

$$\boxed{\bar{z} = x - iy = r\cos\theta - ir\sin\theta = re^{-i\theta}}$$



Propriétés

Pour tout complexe z :

$$z \text{ réel} \Leftrightarrow \overline{z} = z$$
$$z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Pour tous complexes z et z' :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$$

Pour tout complexe z et tout entier naturel n :

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Pour tous complexes z et z', z étant non nul :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \qquad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$$

Propriétés du module

Pour tout complexe z :

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$$

$$|-z| = |z| = |\overline{z}|$$

Pour tous complexes z et z' :

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$
(inégalité triangulaire)

$$|z.z'| \leq |z|.|z'|$$

Pour tout complexe z et tout entier naturel n :

$$|z^n| = |z|^n$$

Pour tous complexes z et z', z étant non nul :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$$

Pour tous points M et P du plan complexe d'affixes respectives m et p :

$$MP = \left\|\overrightarrow{MP}\right\| = |m - p|$$

Propriétés de l'argument

Pour tout complexe z :

$$z \text{ réel } \Leftrightarrow \arg z = 0 \text{ ou } \arg z = \pi$$

$$z \text{ imaginaire pur } \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \arg z = -\frac{\pi}{2}$$

Pour tout complexe z :

$$\arg(-z) = \arg z + \pi$$

$$\arg \overline{z} = -\arg z$$

Pour tous complexes z et z' :

$$\arg(z.z') = \arg z + \arg z'$$

Pour tout complexe z et tout entier naturel n :

$$\arg(z^n) = n \arg z$$

Pour tous complexes z et z', z étant non nul :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \qquad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z$$

Pour tous points M et P du plan complexe d'affixes respectives m et p :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{MP}\right) = \arg(p - m)$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Soit :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$$

Géométrie

Equation paramétrique d'un cercle

Soit $\mathscr{C}\left(\Omega, R\right)$ le cercle de centre Ω, d'affixe ω, et de rayon R.

Pour tout point M, d'affixe z, du plan complexe on a :

$$M \in \mathscr{C}\left(\Omega, R\right) \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R} \,/\, z = \omega + \mathrm{R}e^{i\theta}$$

Transformations du plan

Dans ce qui suit, on considère une transformation du plan. A tout point M d'affixe z, cette transformation associe le point M' d'affixe z'.

Translation

On considère ici la translation de vecteur $\vec{a}$ d'affixe a.

$$\boxed{z' = z + a}$$

Homothétie

On considère ici l'homothétie h de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport k.

$$\boxed{z' - \omega = k\left(z - \omega\right)}$$

Rotation

On considère ici la rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle de mesure α.

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)}$$

Equation du second degré

Soit l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (E)$$

Où a, b et c sont des réels, a étant non nul.

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une seule solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$:
- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.