Fiche PanaMaths (Terminale ES)
→ Suites numériques

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

→ La notion de fonction ;
→ La résolution des équation du 1er et du 2nd degré ;
→ Le calcul fractionnaire.

Ce que vous devez retenir

1. Une suite est une <u>fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels</u> $\mathbb{N}$. Pour la suite *u*, on écrira donc :
$$\boxed{\begin{array}{l} u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}}$$
2. a. Les suites sont généralement désignées par les lettres *u*, *v*, *w* …
   b. La variable est généralement notée *n*.
   Dans ces conditions, la suite *u* est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (notation la plus classique) ou (u_n) ;
   c. L'image de *n* par la suite *u* est notée u_n (on lit « *u* <u>indice</u> *n* » ou « *u* de *n* ») plutôt que $u(n)$ et on dit que u_n est un <u>terme de la suite</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
3. <u>Remarques</u> :
   - En tant que fonction, une suite n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de la variable *n*. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{-\pi}{(n-3)(2n-5)}$ n'est pas définie pour $n = 3$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour toute valeur de *n*, u_n est le *n* + 1ème terme de la suite.
4. <u>Définition explicite d'une suite</u> : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement lorsque u_n est donné en fonction de *n* : $u_n = f(n)$ avec *f* définie au moins sur $\mathbb{R}^+$.
   Par exemple : $u_n = \dfrac{2n^3+7}{n^2+3} = f(n)$ où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3+7}{x^2+3}$.
   Dans ce cas, on peut immédiatement calculer u_n pour n'importe quelle valeur de *n* appartenant à l'ensemble de définition de la fonction *f*.
5. <u>Définition par récurrence d'une suite</u> : on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on dispose :
   (i) D'un terme de la suite (en général, mais pas systématiquement, u_0) ;
   (ii) D'une relation entre u_n et le terme qui le précède (à savoir u_{n+1}). Cette relation est appelée « <u>relation de récurrence</u> ».

Par exemple : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n^3 + 4$

Dans ce cas, le calcul de u_n requiert de calculer tous les termes précédents (à savoir : u_1, u_2, ... , u_{n-1}).

6. Sens de variation d'une suite :
   Si, pour toute valeur de n on a :
   - $u_{n+1} = u_n$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « constante » ;
   - $u_{n+1} \geq u_n$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « croissante » ;
   - $u_{n+1} \leq u_n$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « décroissante ».

7. Suite arithmétique :
   Définition explicite : $u_n = u_0 + nr$

   Définition par récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

   Le réel « r » est appelée « raison » de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Propriété (1) : pour tous entiers n et m, on a : $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

   Propriété (2) : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(u_0 + u_n)}{2}}$

   En particulier, avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$, on a :

   $$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

8. Suite géométrique :
   Définition explicite : $u_n = u_0 \times q^n$

   Définition par récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$

   Le réel « q » est appelée « raison » de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Propriété (1) : pour tous entiers n et m, on a : $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

   Propriété (2) : si $q \neq 1$, on a : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}}$

   En particulier, avec $u_n = q^n$ ($q \neq 1$), on a : $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

Ce que vous devez savoir faire

1. Modéliser une situation à l'aide d'une suite ;

2. Calculer un terme donné d'une suite que celle-ci soit définie explicitement ou par récurrence ;

3. Etudier le sens de variation d'une suite.
   Pour ce faire, vous disposez de trois méthodes :
   i. Etude du sens de variation de la fonction *f* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement ;
   ii. Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
      1. Si, pour tout *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
      2. Si, pour tout *n*, on a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
      3. Si, pour tout *n*, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   iii. Etude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n > 0$ pour tout *n*)
      1. Si, pour tout *n*, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
      2. Si, pour tout *n*, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
      3. Si, pour tout *n*, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Déterminer le premier terme et la raison d'une suite arithmétique ou géométrique connaissant deux termes de cette suite ;

5. Calculer la somme des *n* + 1 premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique ;
   (Sur ce point, nous déconseillons d'apprendre par cœur les formules du cours : il est préférable de bien comprendre la façon dont on les obtient et d'être capable de les retrouver soi-même …)

Ce à quoi vous devez faire particulièrement attention !

- Même si c'est une évidence, gardez présent à l'esprit que la variable *n* appartient à $\mathbb{N}$! Elle ne peut donc prendre que des valeurs entières positives.
- Soyez attentifs(ves) ! Une suite n'est pas nécessairement définie pour toute valeur de *n* : il faut avoir le réflexe de déterminer les éventuelles valeurs de *n* posant problème ;
- Les notations sont nouvelles et il existe plusieurs notations pour une seule et même notion :
  - u, (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la suite ;
  - $u(n)$ ou u_n pour le terme d'indice *n* (ou image de *n* par *u*).
- Toute suite constante est une suite arithmétique de raison $r = 0$ et une suite géométrique de raison $q = 1$ (soit dit en passant, les suites constantes sont les seules suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques !) ;