Fiche PanaMaths (CPGE)

La parabole

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

→ Les généralités sur les coniques ;
→ Le cours relatif aux courbes paramétrées ;
→ Quelques notions élémentaires de géométrie plane.

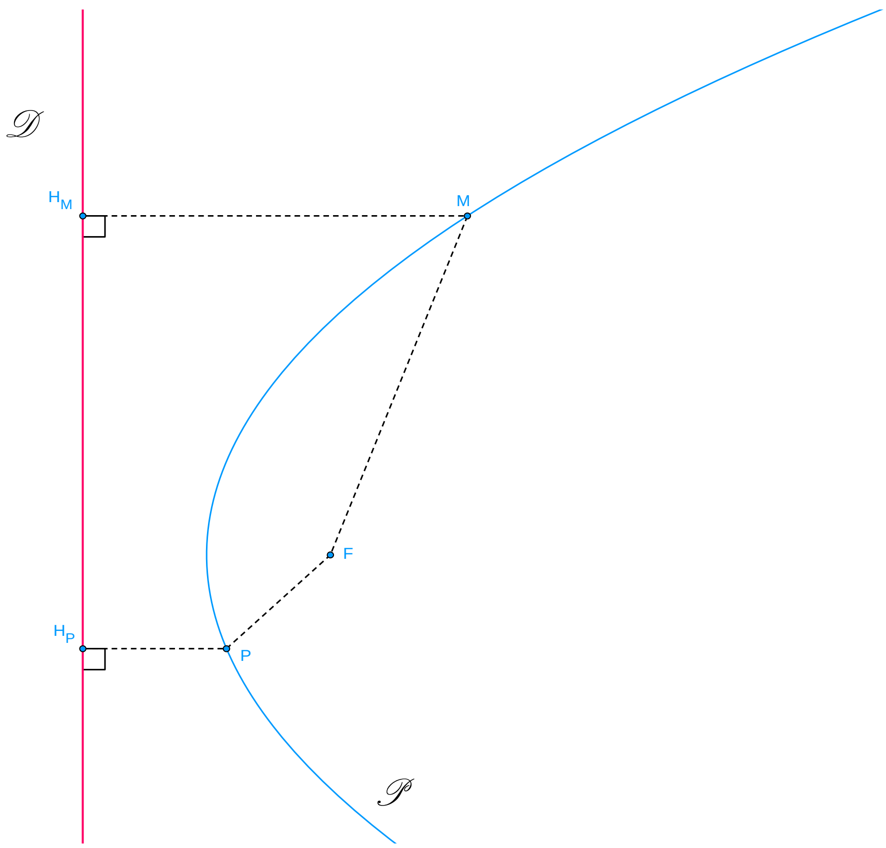
Ce que vous devez retenir

1. Une parabole est une conique dont l'excentricité e est égale à 1.

2. La définition à l'aide du foyer et de la directrice.

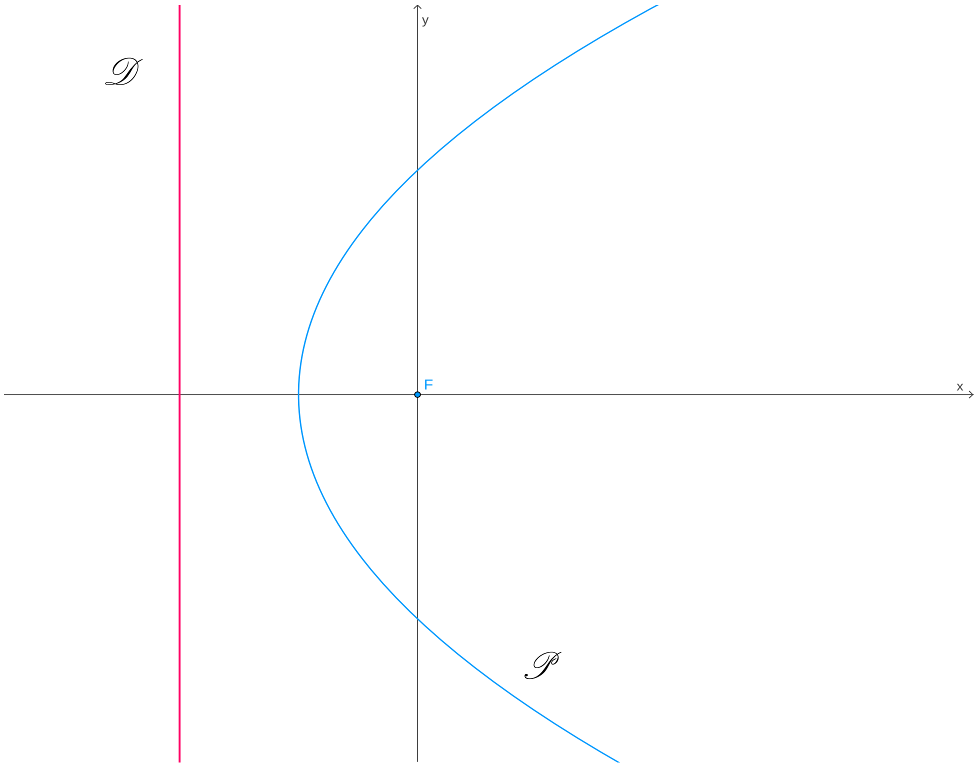
   La parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$ ($\mathrm{F} \notin \mathscr{D}$) est l'ensemble des points du plan situés à égale distance du point F et de la droite $\mathscr{D}$:

$$\boxed{\mathscr{P} = \{\mathrm{M} / \mathrm{MF} = d(\mathrm{M}, \mathscr{D})\}}$$



3. L'équation dans un repère orthonormal d'origine le foyer et d'axe des abscisses perpendiculaire à la directrice, l'équation de celle-ci étant de la forme $x = -p$ ($p > 0$), où p est le paramètre de la parabole (i.e. la distance du foyer à la directrice).

$$\boxed{y^2 = 2px + p^2}$$



4. Dans le repère précédent, l'équation polaire de la parabole est :

$$\boxed{r = \frac{p}{1-\cos\theta}}$$

5. L'équation réduite obtenue en considérant un nouveau repère orthonormal déduit du précédent par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ où S est le sommet de la parabole (de coordonnées $\left(-\frac{p}{2};0\right)$ dans le repère précédent. Voir la figure page suivante).

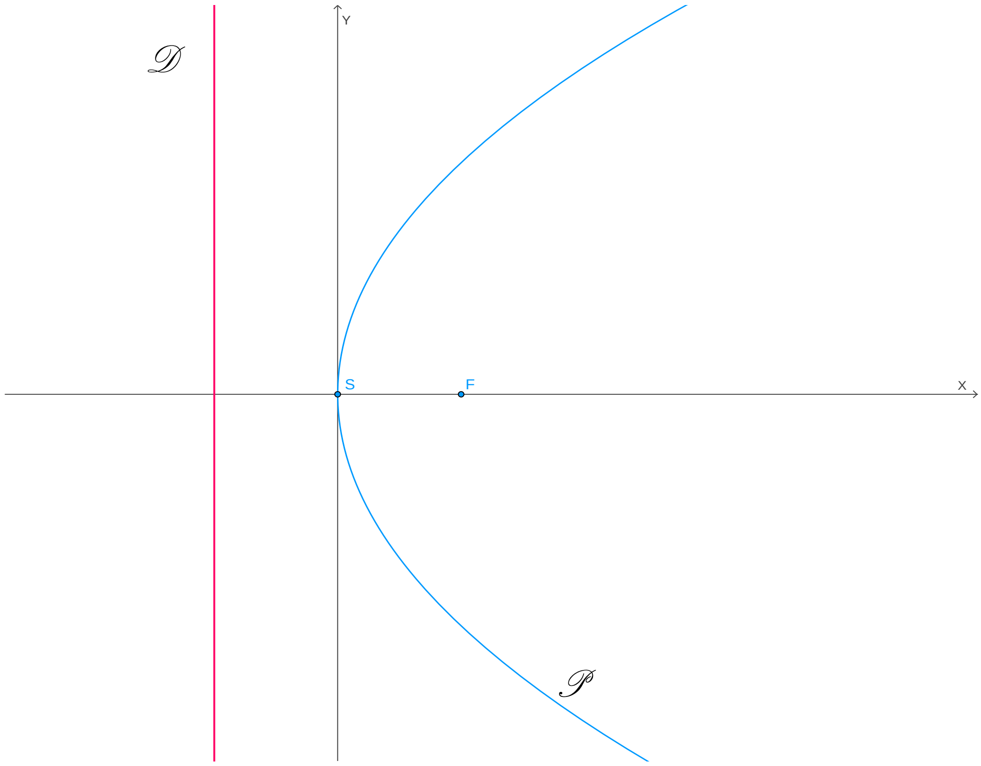
$$\boxed{Y^2 = 2pX}$$

Avec :

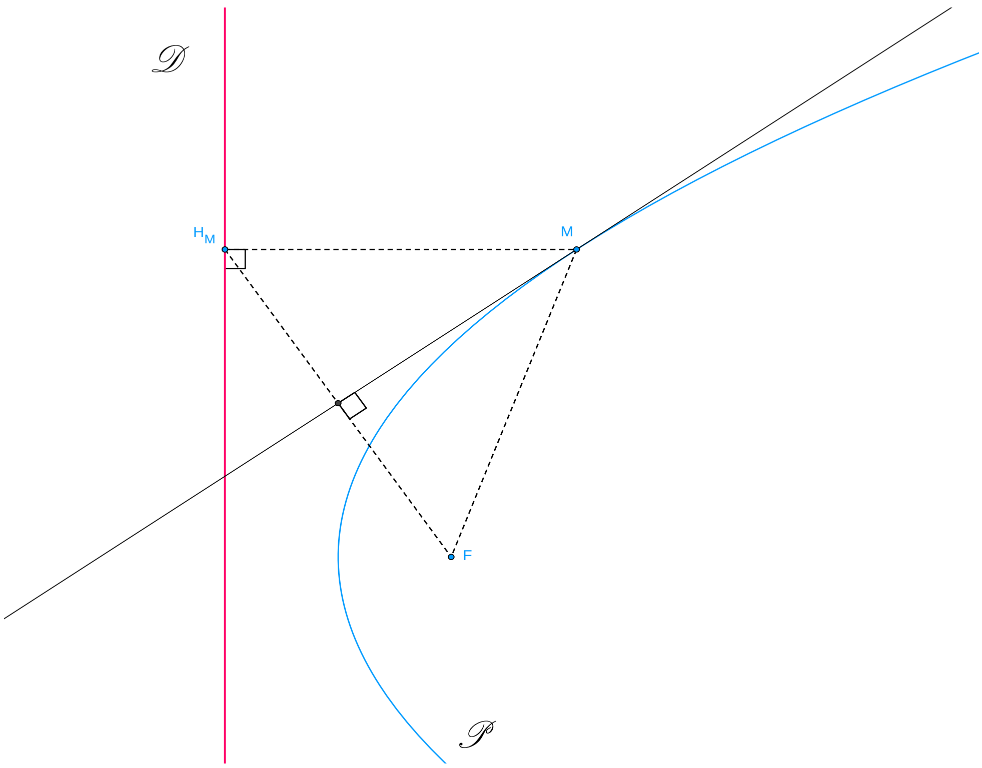
$$\begin{cases} X = x + \dfrac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$$

Remarque. On a alors un paramétrage « naturel » de la parabole :

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ Y(t) = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$



6. <u>La tangente</u> en un point M de la parabole est la médiatrice du segment $[\mathrm{FH_M}]$.



Dans le repère orthonormal de sommet S où la parabole est représentée par son équation réduite $Y^2 = 2pX$, une équation de la tangente au point $\mathrm{M}(\alpha\,;\beta)$ est :

$$\boxed{\beta Y = p(X + \alpha)}$$

Ce que vous devez savoir faire

Il est fondamental de savoir se ramener à l'équation réduite de la parabole et la caractériser (foyer et directrice).

1. Cas où l'équation proposée ne comporte pas de terme croisé.

   Supposons, par exemple, que l'on cherche à identifier et caractériser la courbe d'équation $2t^2 + t + 1 = y$ dans un repère orthonormal.

   On a :

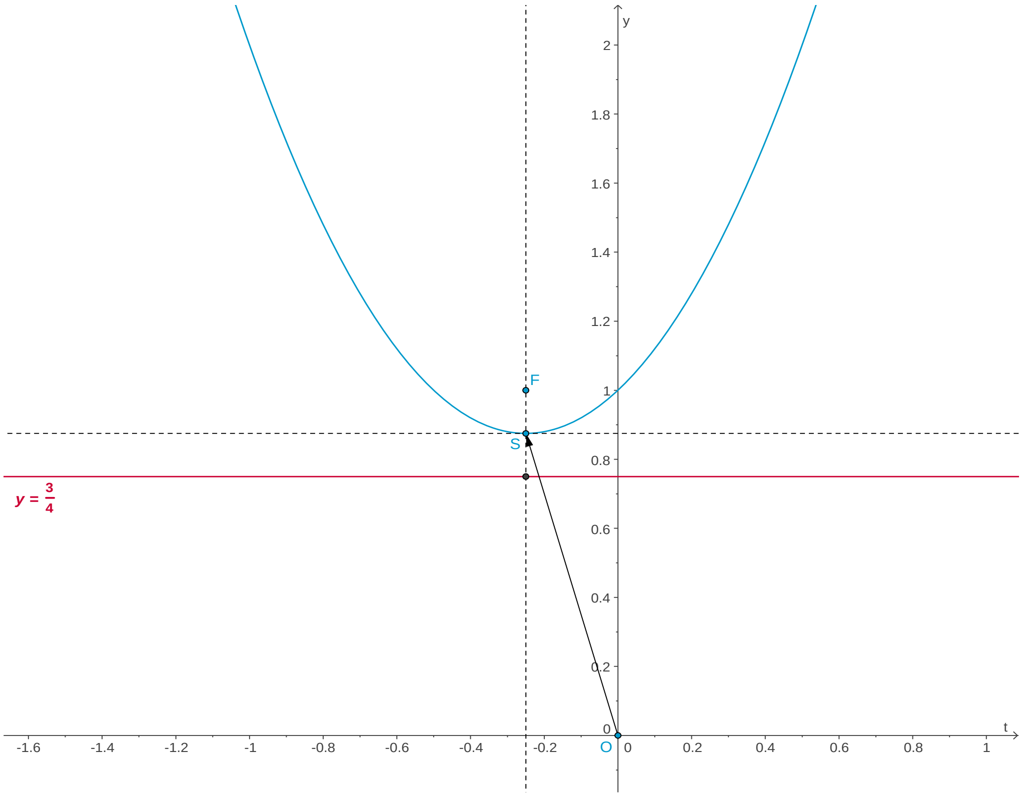
$$2t^2 + t = 2\left(t^2 + \frac{1}{2}t\right) = 2\left(\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

   D'où :

$$2t^2 + t + 1 = y \Leftrightarrow 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 1 = y \Leftrightarrow 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = y \Leftrightarrow 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 = y - \frac{7}{8}$$

   En posant : $T = t + \frac{1}{4}$ et $Y = y - \frac{7}{8}$ (on effectue donc une translation amenant l'origine du repère au point $\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{7}{8}\right)$, correspondant au sommet de la parabole), l'équation de la courbe se récrit simplement : $Y = 2T^2$, soit : $\boxed{T^2 = \frac{1}{2}Y}$

   Il vient alors immédiatement : $p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et une équation de la directrice : $Y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{8}$, soit, dans le repère d'origine : $y = -\frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.



La parabole d'équation : $2t^2+t+1=y$.

2. Cas où l'équation proposée comporte un terme croisé.

Supposons, par exemple, que l'on cherche à identifier et caractériser la courbe d'équation $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=0$ dans un repère orthonormal.

On effectue classiquement un changement de variable correspondant à une rotation des axes du repère initial de centre l'origine et d'angle θ. L'objectif de cette première étape étant, via un choix judicieux de θ, de débarrasser du terme croisé « xy ».

Matriciellement, ce changement de variable s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta.X-\sin\theta.Y \\ \sin\theta.X+\cos\theta.Y \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\theta.X-\sin\theta.Y\right)^2+2\sqrt{3}\left(\cos\theta.X-\sin\theta.Y\right)\left(\sin\theta.X+\cos\theta.Y\right)+3\left(\sin\theta.X+\cos\theta.Y\right)^2$$
$$+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\cos\theta.X-\sin\theta.Y\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(\sin\theta.X+\cos\theta.Y\right)=0$$

Le coefficient du terme croisé « XY » s'écrit :

$$4\sin\theta.\cos\theta+2\sqrt{3}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=2\sin\left(2\theta\right)+2\sqrt{3}\cos\left(2\theta\right)$$

On souhaite que ce coefficient soit nul :

$$2\sin(2\theta)+2\sqrt{3}\cos(2\theta)=0 \Leftrightarrow \sin(2\theta)+\sqrt{3}\cos(2\theta)=0$$
$$\Leftrightarrow \tan(2\theta)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}$$

On peut choisir : $\theta=-\frac{\pi}{6}$, qui donne : $\cos\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

On a alors :

$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=0$$
$$\Leftrightarrow (\cos\theta.X-\sin\theta.Y)^2+2\sqrt{3}(\cos\theta.X-\sin\theta.Y)(\sin\theta.X+\cos\theta.Y)+3(\sin\theta.X+\cos\theta.Y)^2$$
$$+\left(2-\sqrt{3}\right)(\cos\theta.X-\sin\theta.Y)+\left(1+2\sqrt{3}\right)(\sin\theta.X+\cos\theta.Y)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)\left(-\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)+3\left(-\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2$$
$$+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 4Y^2-2X+4Y=0$$
$$\Leftrightarrow X=2Y^2+2Y$$

On est ainsi ramené à la situation précédente : nous avons affaire à une parabole.

On a alors :

$$X=2Y^2+2Y \Leftrightarrow X=2\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow X+\frac{1}{2}=2\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{2}\right)$$

<u>Dans le nouveau repère</u>, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(X_S\,;Y_S)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

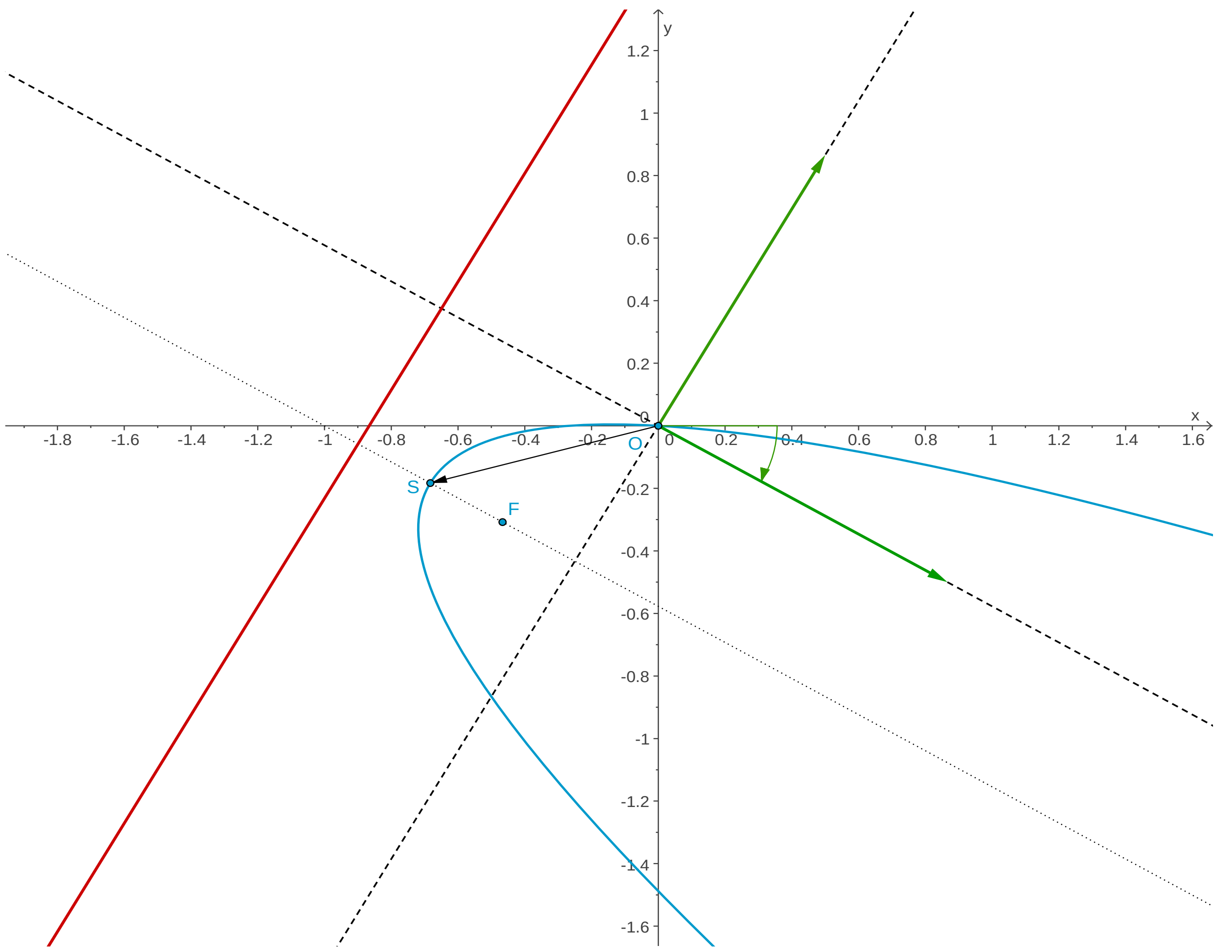
Soit, <u>dans le repère initial</u> :

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}X_S+\frac{1}{2}Y_S \\ -\frac{1}{2}X_S+\frac{\sqrt{3}}{2}Y_S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

L'équation $\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{2}\right)$ nous permet également de calculer le paramètre de la parabole : $p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

On pose alors $X' = X + \frac{1}{2}$ et $Y' = Y + \frac{1}{2}$ (on effectue donc un deuxième changement de variable correspondant en fait à la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$) et dans ce troisième repère, la directrice admet pour équation : $X' = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$.

Comme : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$, l'équation de la directrice dans le repère initial s'écrit : $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, soit : $\boxed{\sqrt{3}x - y + \frac{3}{2} = 0}$.



La parabole d'équation : $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)x + \left(1+2\sqrt{3}\right)y = 0$.