Fiche PanaMaths (CPGE)

→ L'équation du $3^{\text{ème}}$ degré

Introduction

On se propose ici de donner la résolution générale de toute équation de la forme :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$
$$(\text{avec } (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^3)$$

L'approche est similaire, dans son principe général, à celle de la résolution d'une équation du second degré : on commence par donner la forme canonique d'où on tire un discriminant permettant de discuter et de donner les racines éventuelles.

La méthode exposée est la méthode historique de Cardan (1501-1576).

Obtention de la forme canonique de l'équation

On travaille donc $a\neq 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d=0 &\Leftrightarrow a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0\end{aligned}$$

On identifie alors les deux premiers termes de l'expression obtenue aux deux premiers termes du développement de $\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3$:

$$\begin{aligned}x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} &= \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3-3\left(\frac{b}{3a}\right)^2x-\left(\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\\ &=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3\\ &=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3\\ &=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)-\frac{3ac-b^2}{3a^2}\frac{b}{3a}+\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3\\ &=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\frac{-9abc+3b^3+27a^2d-b^3}{27a^3}\\ &=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\frac{-9abc+2b^3+27a^2d}{27a^3}\end{aligned}$$

Cette réduction est toujours possible et, modulo le changement d'inconnue $X = x + \frac{b}{3a}$ et une récriture des coefficients, on constate finalement que le problème revient à résoudre l'équation générale :

$$\boxed{x^3 + px + q = 0} \text{ (E}_c\text{)}$$
$$\text{avec } (p,q) \in \mathbb{C}^2 .$$

C'est la forme canonique associée à l'équation initiale.

Remarques :

- Ces notations sont standard et on les retrouve fréquemment dans la littérature ;
- Cette équation ne comportant pas de terme en x^2, la somme de ses racines complexes est égale à 0.

Discriminant et discussion

Ecrivons x sous la forme $x = u + v$. L'équation canonique se récrit alors :

$$\begin{aligned} & x^3 + px + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0 \end{aligned}$$

On peut ici choisir u et v de telle sorte que $3uv + p = 0$, c'est-à-dire $uv = -\frac{p}{3}$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} u + v = x \\ uv = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

L'équation $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$ donne alors : $u^3 + v^3 + q = 0$. Mais comme $uv = -\frac{p}{3}$, il vient $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Finalement, u^3 et v^3 vérifient : $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Ce sont donc les solutions de l'équation du second degré :

$$\boxed{Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0} \ (\text{E}^*)$$

Son discriminant s'écrit : $\Delta = q^2 + 4 \times \frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}$. La discussion qui doit être menée dépend donc de la quantité : $27q^2 + 4p^3$.

L'égalité $uv = -\frac{p}{3}$ nous a permis d'obtenir $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Soit u_0 tel que u_0^3 soit solution de (E^*). Alors il en va de même pour ju_0 et j^2u_0 (puisque $\left(ju_0\right)^3 = j^3u_0^3 = u_0^3$ et $\left(j^2u_0\right)^3 = j^6u_0^3 = u_0^3$ et parce que l'équation $u^3 = u_0^3$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{C}$).
En raisonnant de façon analogue avec v_0 tel que v_0^3 soit égal à l'autre solution de (E^*) et vérifie $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$, on obtient finalement comme solutions de (E_c) :

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + v_0 \\ x_1 &= ju_0 + j^2v_0 \\ x_2 &= j^2u_0 + jv_0 \end{aligned}$$

La question est désormais de savoir s'il y a des racines multiples.

Si $p = 0$, (E_c) se récrit $x^3 + q = 0$. Alors :

- Si $q = 0$, (E_c) admet 0 comme racine triple (c'est d'ailleurs la seule racine triple possible puisque $P''\left(X\right) = 6X$) ;
- Si $q \neq 0$, (E_c) admet trois racines distinctes.

On suppose maintenant que l'on a : $p \neq 0$.

Considérons le polynôme $P\left(X\right) = X^3 + pX + q$. Alors : $P'\left(X\right) = 3X^2 + p$.

L'équation (E_c) admet une racine (au moins) double, si, et seulement si, P et P' ne sont pas premiers entre eux.

Effectuons la division euclidienne de P par P' :

$$\begin{aligned} P\left(X\right) = X^3 + pX + q &= \frac{1}{3}\left(3X^3 + 3pX\right) + q \\ &= \frac{1}{3}X\left(3X^2 + 3p\right) + q = \frac{1}{3}X\left(3X^2 + p\right) + \frac{2}{3}pX + q \\ &= \frac{1}{3}XP'\left(X\right) + \frac{2}{3}pX + q \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$PGCD(P,P')=PGCD\left(P',\frac{2}{3}pX+q\right)$$

On en déduit immédiatement que (E_c) admet une racine (au moins) double si, et seulement si $\frac{2}{3}pX+q$ divise P' c'est-à-dire si, et seulement si, $-\frac{3q}{2p}$ est racine de P'.

Or, $P'\left(-\frac{3q}{2p}\right)=3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2+p=3\frac{9q^2}{4p^2}+p=\frac{27q^2+4p^3}{4p^2}$.

Donc $-\frac{3q}{2p}$ est racine de P' si, et seulement si : $27q^2+4p^3=0$.

Lorsque l'on aura $27q^2+4p^3=0$ et $p\neq 0$, la racine multiple sera donc double et égale à $-\frac{3q}{2p}$. La somme des racines de (E_c) valant 0, la deuxième racine vaut donc : $\frac{3q}{p}$.

On a finalement :

- Si $27q^2+4p^3\neq 0$ l'équation (E_c) admet trois racines simples ;
- Si $27q^2+4p^3=0$ l'équation admet :
    - Si $p=0$ (on a alors aussi $q=0$) : 0 comme racine triple ;
    - Si $p\neq 0$: une racine double égale à $-\frac{3q}{2p}$ et une racine simple égale à $\frac{3q}{p}$.

Cas d'une équation à coefficients réels

On suppose ici $(p;q)\in\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, on a :

- Si $\Delta=0$
  On se trouve dans la situation vue précédemment. L'équation admet des racines multiples qui sont toutes réelles.

- Si $\Delta>0$
  L'équation $Y^2+qY-\frac{p^3}{27}=0$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\frac{-q-\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2} \text{ et } \frac{-q+\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}$$

On peut écrire :

$$\frac{-q-\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Les deux racines s'écrivent donc : $-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ et $-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

On peut alors considérer, en reprenant les notations de la partie précédente, les racines cubiques de ces expressions :

$$u_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\text{ et }v_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ces quantités sont réelles et leur produit vaut bien $-\frac{p}{3}$ puisque dans $\mathbb{R}$ on a l'équivalence : $u_0^3v_0^3=-\frac{p^3}{27}\Leftrightarrow u_0v_0=-\frac{p}{3}$.

Les racines de (E_c) s'écrivent finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}
x_0&=u_0+v_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
x_1&=ju_0+j^2v_0=j\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
x_2&=j^2u_0+jv_0=j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+j\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}}$$

La racine x_0 est réelle. C'est la formule historique de Cardan-Tartaglia.

En tenant compte de $\overline{j}=j^2$ et comme $x_1\neq x_2$ (pas de racine multiple), on déduit que x_1 et x_2 sont deux racines complexes conjuguées.

- Si $\Delta<0$

  L'équation $Y^2+qY-\frac{p^3}{27}=0$ admet deux racines complexes conjuguées (coefficients réels et discriminant strictement négatif) :

$$\frac{-q-i\sqrt{\frac{\left|27q^2+4p^3\right|}{27}}}{2}\text{ et }\frac{-q+i\sqrt{\frac{\left|27q^2+4p^3\right|}{27}}}{2}$$

Soit, en procédant comme dans le cas précédent :

$$-\frac{q}{2}-i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \text{ et } -\frac{q}{2}+i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}$$

Si nous notons α, $j\alpha$ et $j^2\alpha$ les trois racines de $X^3+\frac{q}{2}+i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}$, alors les trois racines de $X^3+\frac{q}{2}-i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}$ seront les conjugués de ces trois complexes, à savoir : $\overline{\alpha}$, $\overline{j\alpha}=\overline{j}\,\overline{\alpha}=j^2\overline{\alpha}$ et $\overline{j^2\alpha}=\overline{j^2}\,\overline{\alpha}=j\overline{\alpha}$. Mais puisque le produit uv doit être réel (il vaut, rappelons-le, $-\frac{p}{3}$), les trois couples (u,v) possibles sont :

$$(\alpha,\overline{\alpha}),\ (j\alpha, j^2\overline{\alpha}) \text{ et } (j^2\alpha, j\overline{\alpha})$$

Les racines de (E_c) s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \alpha+\overline{\alpha} \\ x_1 &= j\alpha+j^2\overline{\alpha} \\ x_2 &= j^2\alpha+j\overline{\alpha} \end{aligned}}$$

Les trois racines ainsi obtenues sont réelles (chacune est égale à sa conjuguée) distinctes.

Synthèse

1. Toute équation du 3ème degré peut être mise sous forme canonique : $x^3+px+q=0$;
2. Le discriminant associé s'écrit : $27q^2+4p^3$;
3. On a la discussion suivante :
   - Si $27q^2+4p^3\neq 0$, l'équation admet trois racines distinctes ;
     Lorsque les coefficients p et q sont réels on a plus précisément :
     - Si $27q^2+4p^3>0$, l'équation admet une racine réelle (donnée par la formule de Cardan : $x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$) et deux racines complexes conjuguées ;
     - Si $27q^2+4p^3<0$, l'équation admet trois racines réelles distinctes.
   - Si $27q^2+4p^3=0$, l'équation admet une racine simple ($\frac{3q}{p}$)et une racine double ($-\frac{3q}{2p}$) lorsque $p\neq 0$ ou une racine triple (0) lorsque $p=q=0$.

Un exemple pour prendre un peu de recul …

Considérons l'équation suivante :

$$x^3 + x - 2 = 0$$

L'équation est sous forme canonique et on a : $p = 1$ et $q = -2$.

Le discriminant vaut alors : $27q^2 + 4p^3 = 27\times(-2)^2 + 4\times 1^3 = 27\times 4 + 4 = 112 > 0$.

L'équation admet donc dans $\mathbb{C}$ une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

La racine réelle est donnée par la formule de Cardan-Tartaglia :

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}
\end{aligned}$$

Cette expression semble assez complexe … On sera probablement un peu dérouté lorsque, de surcroît, on constatera que 1 est racine évidente de l'équation initiale et que l'on a ainsi :

$$\sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1$$

On saura (partiellement ?) se convaincre de la validité de cette égalité à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice mais si nous n'en disposions pas (imaginez, en particulier, la situation au début du 16$^{\text{ème}}$ siècle !) …

Ainsi, une formule, aussi belle soit-elle, n'est peut-être pas toujours une fin en soi …