Fiche PanaMaths (Terminale ES)

→ *Dérivation*

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

→ La notion d'intervalle (ouvert, fermé, …) ;
→ Les fonctions usuelles (affine, inverse, racine carrée, puissance) ;
→ Le calcul fractionnaire ;

Ce que vous devez retenir

1. La notion de « taux de variation d'une fonction *f* entre deux valeurs *a* et *b* » ($a \neq b$) :
$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$
On peut toujours poser : $b = a + h$ (comme $a \neq b$, on a $h \neq 0$) et le taux de variation s'écrit alors :
$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$
2. La notion de « nombre dérivé d'une fonction *f* pour une valeur donnée *a* » : c'est, lorsqu'elle existe, la limite du taux de variation de la fonction *f* entre les valeurs *a* et $a + h$:
$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$
Lorsqu'une fonction *f* admet un nombre dérivé pour une valeur donnée *a*, on dit que

« la fonction *f* est dérivable en *a* » et on note :
$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$
3. Lorsqu'une fonction *f* est dérivable en *a*, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $A(a;\, f(a))$ du graphe de *f* et l'équation réduite de la tangente au graphe de *f* en *A* s'écrit (les deux formes sont équivalentes) :
$$\boxed{y = f'(a)\times(x-a)+f(a)}$$
ou
$$\boxed{y = f'(a)\times x + f(a) - f'(a)\times a}$$
4. Lorsqu'une fonction *f* est dérivable pour toute valeur d'un intervalle I donné, on dit que « la fonction *f* est dérivable sur I » et la fonction définie sur I par : $x \mapsto f'(x)$ est appelée « fonction dérivée de *f* sur l'intervalle I » ;

5. <u>Les fonctions polynômes, la fonction inverse, la fonction racine carrée et les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de leurs ensembles de définition</u>.

6. Les fonctions dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	**Ensemble de définition**	**Fonction dérivée**	**Exemples et remarques**
$x \mapsto \alpha x+\beta$ **(**α **et** β **réels)**	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha$	**Si** $f(x)=-3x+5$ **alors** $f'(x)=-3$ **Si** $f(x)=\pi x$ **alors** $f'(x)=\pi$ **Si** $f(x)=15,5$ **alors** $f'(x)=0$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	**La fonction inverse est dérivable sur les intervalles** $]-\infty;0[$ **et** $]0;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	**La fonction racine carrée est définie sur** $\mathbb{R}^+$ **et dérivable sur** $\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto x^n$ **(**$n \in \mathbb{Z}\setminus\{0;1\}$**)**	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	**Si** $f(x)=x^3$ **alors** $f'(x)=3x^2$ **Si** $f(x)=x^{54}$ **alors** $f'(x)=54x^{53}$ **Si** $f(x)=x^{-4}=\dfrac{1}{x^4}$ **alors** $f'(x)=\dfrac{-4}{x^5}$
$x \mapsto \ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	

7. Les règles de dérivation suivantes :
   - <u>Dérivée d'une somme/d'une différence</u> :
     Si on a $h=f+g$ sur un intervalle I sur lequel les fonctions *f* et *g* sont dérivables alors la fonction *h* est dérivable sur l'intervalle I et on a, pour toute valeur *x* de I :
     $$\boxed{h'(x)=f'(x)+g'(x)}$$
   - <u>Dérivée d'un produit</u> :
     Si on a $h=f\times g$ sur un intervalle I sur lequel les fonctions *f* et *g* sont dérivables alors la fonction *h* est dérivable sur l'intervalle I et on a, pour toute valeur *x* de I :
     $$\boxed{h'(x)=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)}$$
   - <u>Dérivée d'un rapport</u> :
     Si on a $h=\dfrac{f}{g}$ sur un intervalle I sur lequel les fonctions *f* et *g* sont dérivables et sur lequel la fonction *g* ne s'annule pas alors la fonction *h* est dérivable sur l'intervalle I et on a, pour toute valeur *x* de I :
     $$\boxed{h'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Si, en particulier, on prend au numérateur la fonction constante égale à l'unité, on obtient la formule donnant la dérivée de l'inverse d'une fonction :

$$\boxed{h'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}}$$

- Dérivée d'une composée :
  Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si g est une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(\mathrm{I})$, alors f suivie de g (on la note gof) est dérivable sur I et on a :

  $$\boxed{(gof)'=f'(g'of)}$$

  Soulignons les cas particuliers suivants :
  - Si f est dérivable sur I et prend des valeurs strictement positives alors $\ln f$ est dérivable sur I et on a :

    $$\boxed{(\ln f)'=\frac{f'}{f}}$$
  - Si f est dérivable sur I alors e^f est également dérivable sur I et on a :

    $$\boxed{\left(e^f\right)'=f'e^f}$$
  - Si n est un entier non nul et si f est dérivable sur I (et si, lorsque n est négatif, f ne s'annule pas sur I) alors f^n est également dérivable sur I et on a :

    $$\boxed{\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}}$$
  - Si f est dérivable sur I et prend des valeurs strictement positives alors $\sqrt{f}$ est également dérivable sur I et on a :

    $$\boxed{\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}}$$

Ce que vous devez savoir faire

1. *Calculer le taux de variation d'une fonction donnée f entre deux valeurs a et b ;*
2. *Déterminer la valeur de* $f'(a)$ *lorsque la fonction f est dérivable en a ;*
3. *Déterminer la fonction dérivée* f' *d'une fonction f dérivable sur un intervalle I donné ;*
4. *Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point* $A(a;f(a))$, *la fonction f étant dérivable en a ;*
5. *Mettre en œuvre les notions ci-dessus dans les cas suivants :*
   - *Calcul d'une vitesse moyenne (taux de variation) et d'une vitesse instantanée (nombre dérivé) ;*
   - *Calcul approché d'un nombre en utilisant l'approximation :* $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\times h$ *lorsque h est petit par rapport à a*

Par exemple, si l'on souhaite déterminer une valeur approchée de $\frac{1}{20,3}$*, on considère la fonction inverse* $x \mapsto \frac{1}{x}$*,* $a = 20$ *et* $h = 0,3$*. Comme la dérivée de la fonction inverse est la fonction* $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$*, on peut écrire :*

$$\frac{1}{20,3} \simeq \frac{1}{20} - \frac{1}{20^2} \times 0,3 = \frac{1}{20} - \frac{0,3}{400} = 0,05 - 0,00075 = 0,04925$$

- *Autres calculs approchés (économie) :*
  - i. *<u>Calcul du coût marginal d'une production</u> :*
    On suppose que le coût de fabrication d'une quantité x d'un bien est donné par une fonction $C(x)$*. Le « coût marginal de production d'une unité supplémentaire » pour une production donnée x est la différence* $C(x+1) - C(x)$*. Comme x est en général grand par rapport à 1, on a l'approximation :* $C(x+1) - C(x) \simeq C'(x)$
  - ii. *<u>Calcul d'une valeur approchée du pourcentage de variation correspondant à n hausses successives</u> :*
    On suppose qu'une grandeur subit n augmentations successives de t% chacune, le pourcentage t étant petit par rapport à 1.
    Alors, le pourcentage global d'augmentation de la grandeur vaut environ : nt%.

    Remarque : bien que vous sachiez que le pourcentage d'augmentation correspondant à deux hausses successives de 2% ne vaut pas 4% (cf le cours relatif aux pourcentages), le calcul sur les dérivées justifie en revanche que cette valeur puisse être considérée comme une approximation acceptable !

Ce à quoi vous devez faire particulièrement attention !

- Ne pas oublier de <u>justifier la dérivabilité d'une fonction</u> avant d'en calculer la dérivée !
- Les formules donnant les dérivées du rapport de deux fonctions ou de l'inverse d'une fonction font apparaître des signes « - » qu'il ne faut absolument pas oublier !
- Lorsque vous effectuez un calcul de nombre dérivée dans le cadre d'un problème, vous devez préciser, en guise de conclusion de votre calcul, l'unité associée à ce nombre. Ainsi, dans le cas d'une vitesse instantanée, l'unité pourra être le km/h (ou kmh^{-1}), le km/s (ou kms^{-1}), … ;