Fiche PanaMaths (Terminale ES)
→ Croissances comparées

Ce que vous devez connaître ou savoir-faire pour aborder ce cours

→ Les principales règles de calcul des limites de fonctions ;
→ Les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Ce que vous devez retenir

1. Les limites en $+\infty$:

   Pour n entier naturel non nul :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+}$$

   On dit que « toute puissance entière (naturelle) l'emporte sur le logarithme népérien ».
   En fait, on retiendra : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, la limite ci-dessus en découlant immédiatement.

   Pour n entier naturel :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

   On dit que « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance (naturelle) ».
   On remarque que le résultat reste valable lorsque la puissance est négative (mais dans ce cas, on n'a plus affaire à une forme indéterminée …)..

   On doit absolument retenir :

> En $+\infty$:
> - L'exponentielle croît plus vite que toute puissance ;
> - Toute puissance croît plus vite que le logarithme népérien.

2. La limite en $-\infty$ (n entier naturel) :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$$

Ce que vous devez savoir faire

Il est important de savoir se ramener à l'une des trois situations mentionnées ci-dessus !

Considérons par exemple la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^{5x+3}}{44x^4}$.

On demande : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout *x* réel non nul, on a :

$$f(x)=\frac{e^{5x+3}}{44x^4}=\frac{e^{5x}\times e^3}{44\times x^4}=\frac{e^3}{44}\times\frac{e^{5x}}{x^4}=\frac{e^3}{44}\times\frac{5^4 e^{5x}}{5^4 x^4}=\frac{e^3}{44}\times 5^4\times\frac{e^{5x}}{5^4 x^4}=\frac{5^4 e^3}{44}\times\frac{e^{5x}}{(5x)^4}$$

L'idée directrice de la démarche ci-dessus est de faire apparaître au dénominateur une puissance de l'argument ($5x$) de l'exponentielle.

Posons alors : $X=5x$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{(5x)^4}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^4}=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5^4 e^3}{44}\times\dfrac{e^{5x}}{(5x)^4}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{5^4 e^3}{44}\times\dfrac{e^X}{X^4}\right)=+\infty$

(en tenant compte du fait que l'on a : $\dfrac{5^4 e^3}{44}>0$)

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

Ce à quoi vous devez faire particulièrement attention !

On prendra garde de ne pas confondre les résultats valables en $-\infty$ et ceux valables en $+\infty$!