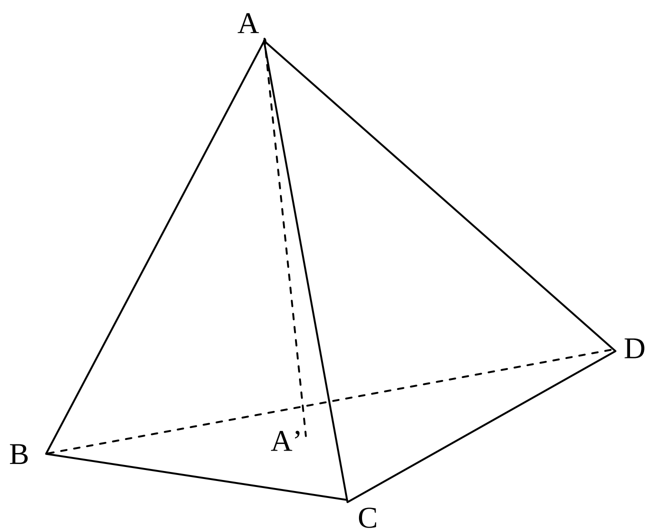
Pondichery – Avril 2011 – Série S – Exercice

Partie I

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A' est le centre de gravité du triangle BCD.
Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment $[AA']$ est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

$(\mathscr{P}_1)$: *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

a. Montrer que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=0$ et que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment $[BD]$ et le milieu J du segment $[BC]$).

b. En déduire que la médiane (AA') est orthogonale à la face BCD.

Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leurs faces opposées.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

On souhaite démontrer la propriété suivante :

$(\mathscr{P}_2)$: *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G.*

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA') puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points : $P(1;2;3)$, $Q(4;2;-1)$ et $R(-2;3;0)$.

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2. Calculer les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan OQR est : $3x+2y+16z=0$.

4. La propriété $(\mathscr{P}_1)$ de la partie I est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

Analyse

Dans la première partie, on établit deux résultats importants (et très classiques !) dans le tétraèdre, le premier étant propre aux tétraèdres réguliers. Si l'usage qui est fait du produit scalaire dans la question 1 est assez modeste, la deuxième question est prétexte à une mise en œuvre d'une belle propriété du barycentre (l'associativité), thème à ne pas négliger dans les révisions ! La deuxième partie fait la part belle à la géométrie analytique (calcul de distances, de coordonnées de centre de gravité, détermination de l'équation d'un plan).

Résolution

Partie I

Question 1.a.

On veut montrer $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=0$.
Comme suggéré dans l'énoncé, introduisons le point I milieu du segment $[BD]$.
On a alors :

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IA'}\right).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{BD}$$

I étant le milieu du segment $[BD]$, dans le triangle équilatéral ABD, la droite (AI) est la hauteur issue de A. Elle est donc perpendiculaire à la droite (BD) et on en déduit immédiatement :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=0$$

Par ailleurs, le point A' est le centre de gravité du triangle BCD. Celui-ci étant équilatéral et I étant le milieu du segment $[BD]$, le point A', intersection des médianes, appartient donc à la droite (CI), médiane issue du sommet C. Mais le triangle BCD étant équilatéral, cette médiane est également la hauteur issue du sommet C. On en déduit ainsi que les droites $(A'I)$ et (BD) sont perpendiculaires. Il vient alors :

$$\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{BD}=0$$

Finalement :

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{BD}=0+0=0$$

En considérant le point J milieu du segment $[BC]$ et en raisonnant comme ci-dessus, il vient :

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=0 \text{ et } \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0}$$

Question 1.b.

BCD étant un triangle équilatéral, les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
Comme les produits scalaires $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}$ sont nuls, on en déduit immédiatement que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).

$$\boxed{\text{La droite } (AA') \text{ est orthogonale au plan } (BCD).}$$

Question 2.

G étant l'isobarycentre des points A, B, C et D, on peut écrire :

$$G = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} G \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le point A' étant le centre de gravité du triangle BCD, il s'agit de l'isobarycentre des points B, C et D. On a donc :

$$A' = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|} B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A' \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'associativité du barycentre nous permet alors de conclure :

$$G = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} G \\ 4 \end{pmatrix} = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 1 & 3 \end{array}\right)$$

On en déduit ainsi immédiatement que les points G, A et A' sont alignés. D'où :

Le point G appartient à la droite (AA').

Le raisonnement précédent étant valable pour n'importe laquelle des quatre médiatrices du tétraèdre ABCD, on en déduit que celles-ci sont concourantes en G.

Les médiatrices du tétraèdre ABCD sont concourantes en G.

Partie II

Question 1.

Un tétraèdre est régulier si, et seulement si, ses 6 arêtes dont de même longueurs.
L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on a :

$$OP = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{15}$$
$$OQ = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

Comme $OP \neq OQ$ on en déduit immédiatement que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

Le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

Question 2.

De la relation $\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)$ et en notant $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées de P', on tire immédiatement :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}\left(4+(-2)\right)=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3}(2+3)=\frac{5}{3} \\ z=\frac{1}{3}\left((-1)+0\right)=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{P}'\left(\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)}$$

Question 3.

Le plan (OQR) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, les réels *a*, *b* et *c* n'étant pas tous les trois nuls.
Comme $\mathrm{O}(0\,;0\,;0)$ appartient à ce plan, on a immédiatement : $d=0$.
On a alors :

$$\mathrm{Q}\in(\mathrm{OQR})\Leftrightarrow a\times 4+b\times 2+c\times(-1)=0\Leftrightarrow 4a+2b-c=0$$

$$\mathrm{R}\in(\mathrm{OQR})\Leftrightarrow a\times(-2)+b\times 3+c\times 0=0\Leftrightarrow -2a+3b=0$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} 4a+2b=c \\ -2a+3b=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+2b=c \\ -4a+6b=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+2b=c \\ 8b=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+2b=c \\ b=\frac{c}{8} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+\frac{c}{4}=c \\ b=\frac{c}{8} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a=\frac{3c}{4} \\ b=\frac{c}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{3c}{16} \\ b=\frac{c}{8} \end{cases}$$

Ainsi, la forme générale d'une équation cartésienne du plan (OQR) est :

$$\frac{3c}{16}x+\frac{c}{8}y+cz=0$$

En choisissant alors $c=16$, on obtient l'équation :

$$3x+2y+16z=0$$

Le plan (OQR) admet pour équation cartésienne : $3x+2y+16z=0$.

Question 4.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, l'équation obtenue à la question précédente nous permet d'affirmer que le vecteur $\vec{n}(3\,;2\,;16)$ est normal au plan (OQR).

La médiane associée au sommet P est la droite $(\mathrm{PP'})$ de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$. A l'aide des coordonnées de $\mathrm{P'}$ obtenues à la question 2, il vient facilement :

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{10}{3}\right)$$

Si la médiane $(\mathrm{PP'})$ était orthogonale au plan (OQR), les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ et $\vec{n}$ seraient colinéaires et l'abscisse et l'ordonnées de $\vec{n}$ seraient égales (puisque c'est le cas pour $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$).
On en déduit donc que $(\mathrm{PP'})$ n'est pas orthogonale au plan (OQR) et que la propriété $(\mathscr{P}_1)$ de la partie I n'est pas vraie dans un tétraèdre quelconque.

La propriété $(\mathscr{P}_1)$ de la partie I n'est pas vraie dans un tétraèdre quelconque.