Pondichéry – Avril 2014 – Série S – Exercice

Dans cet exercice, sauf indication contraire, tous les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en année, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P\left(X \leq 2\right) = 0{,}15$.

   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

   Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P\left(X \geq 3\right)$.

   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h,
   $P_{x\geq t}\left(X \geq t+h\right) = P\left(X \geq h\right)$.

   c. Le moteur a fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3. **Dans la suite de cet exercice, on donner des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}.**

   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1%. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

Analyse

L'exercice porte sur les lois de probabilités continues et la fluctuation.
Plus précisément, dans les questions 1 et 2, on manipule une loi exponentielle et on demande (question 2.b.) d'en redonner une propriété fondamentale : l'absence de mémoire.
Dans la question 3, on s'intéresse à un problème de fluctuation d'échantillonnage en effectuant un test sur une proportion.

Résolution

Question 1.

La loi exponentielle de paramètre λ admet pour densité la fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ où *t* est un réel positif.
Ainsi, on a classiquement :

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^2 e^{-\lambda t}dt = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^2 = -e^{-2\lambda} - \left(-e^{-2\times 0}\right) = 1 - e^{-2\lambda}$$

Il vient alors :

$$P(X \leq 2) = 0{,}15 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0{,}85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0{,}85 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0{,}85}{-2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 0{,}85}{-2}}$$

Rappelons que l'on a pour tout *x* réel positif : $P(X \leq x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$ et donc $P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - \int_0^x f(t)\,dt = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}$.

Question 2.a.

On a, en prenant $\lambda = 0{,}081$:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \int_0^3 f(t)\,dt = 1 - \left(1 - e^{-3\lambda}\right) = e^{-3\lambda} = e^{-3\times 0{,}081} = e^{-0{,}243} \simeq 0{,}78$$

$$\boxed{P(X \geq 3) = e^{-0{,}243} \simeq 0{,}78}$$

Question 2.b.

Pour tous réels *t* et *h* positifs, on a :

$$\begin{aligned} P_{x\geq t}\left(X \geq t+h\right) &= \frac{P\left(X \geq t+h \cap X \geq t\right)}{P\left(X \geq t\right)} = \frac{P\left(X \geq t+h\right)}{P\left(X \geq t\right)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)+\lambda t} = e^{-\lambda h} \\ &= 1-\left(1-e^{-\lambda h}\right) = 1-P\left(X < h\right) \\ &= P\left(X \geq h\right) \end{aligned}$$

On a bien :

> Pour tous réels *t* et *h* positifs : $P_{x\geq t}\left(X \geq t+h\right) = P\left(X \geq h\right)$.

Question 2.c.

On sait que le moteur a fonctionné durant 3ans. L'événement $X \geq 3$ est donc réalisé.
La probabilité que le moteur fonctionne encore deux ans est donc : $P_{x\geq 3}\left(X \geq 5\right)$.
Pour la calculer, il suffit donc d'utiliser le résultat de la question précédente avec $t = 3$ et $h = 2$: $P_{x\geq 3}\left(X \geq 5\right) = P_{x\geq 3}\left(X \geq 3+2\right) = P\left(X \geq 2\right) = e^{-2\times 0,081} = e^{-0,162} \simeq 0,85$.

> La probabilité que le moteur fonctionne encore 2 ans
> sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans est égale à :
> $e^{-0,162} \simeq 0,85$

Question 2.d.

On a directement : $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,081} \simeq 12,35$.

La durée de vie moyenne d'un moteur est donc égale à environ 12,35 années soit 12 ans et 4 mois environ (valeur arrondie au mois).

> La durée de vie moyenne d'un moteur est donc égale à environ 12,35 années
> soit 12 ans et 4 mois environ (valeur arrondie au mois).

Question 3.

Supposons que la proportion de moteurs défectueux soit effectivement égale à 1%.
On modélise le tirage des 800 moteurs dans la production par un tirage <u>avec remise</u> (on suppose que la taille de cet échantillon est faible par rapport à la production totale). Dès lors,

le nombre D de moteurs défectueux obtenus suit une loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = 1\% = 0,01$.

D'après le cours, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour D est alors :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01(1-0,01)}}{\sqrt{800}} \,;\, 0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01(1-0,01)}}{\sqrt{800}} \right] \\ &\simeq [0,003\,;\,0,017] \\ &= [0,3\%\,;\,1,7\%] \end{aligned}$$

Cela signifie que, sous l'hypothèse qu'il y ait effectivement 1% des moteurs défectueux dans la production, la probabilité que la proportion de moteurs défectueux <u>mesurée dans un échantillon de 800 moteurs</u> soit comprise entre 0,3% et 1,7% vaut 95%. Dans l'échantillon de 800 moteurs considéré ici, cette proportion vaut $\frac{15}{800} = 0,018\,75 \simeq 0,019 = 1,9\%$. Elle est donc nettement supérieure à 1,7% et la probabilité d'obtenir une valeur supérieure à 1,7% étant d'environ 0,025 on peut conclure en rejetant l'hypothèse initiale : l'annonce de l'entreprise A peut raisonnablement être remise en question.

L'annonce de l'entreprise A peut raisonnablement être remise en question.

Remarque : on peut noter que les conditions d'utilisation d'une intervalle de fluctuation asymptotique sont ici réunies : $n = 800 \geq 30$, $np = 800 \times 0,01 = 8 \geq 5$ et $n(1-p) = 800 \times 0,99 = 792 \geq 5$.