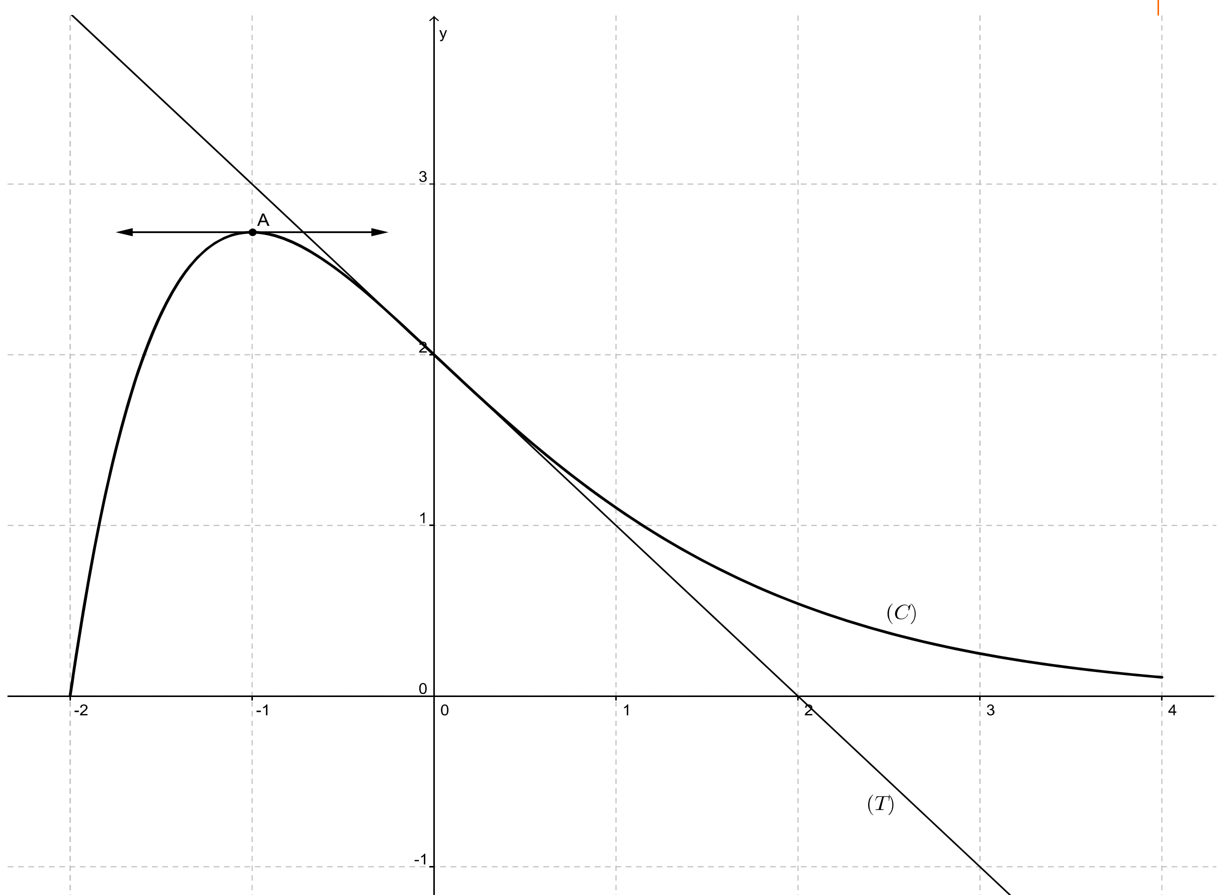
Amérique du Nord – Mai 2012 – Série ES – Exercice

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\left(C\right)$ d'une fonction *f* définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-2;4\right]$.

On nomme *A* le point de $\left(C\right)$ d'abscisse -1 et *B* le point de $\left(C\right)$ d'abscisse 0.

- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-2;-1\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1;4\right]$.
- La tangente à $\left(C\right)$ au point *A* est horizontale.
- La droite $\left(T\right)$ est la tangente à $\left(C\right)$ au point *B* et a pour équation $y=-x+2$.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.

b) Déterminer le signe de $f'(2)$.

c) Interpréter graphiquement $f'(0)$ puis donner sa valeur.

2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ exprimée en unité d'aire.

Partie B

La fonction *f* de la **partie A** a pour expression $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point *A* de la courbe (C).

2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-2;4]$.

3. Montrer que la fonction *F* définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $F(x)=(-x-3)e^{-x}$ est une primitive de *f*.

4. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question 2 de la partie A.

Analyse

Une représentation graphique est prétexte à de nombreuses questions qui ne présentent pas un haut niveau de difficulté mais, classiquement désormais, s'avèrent variées.

Résolution

Partie A

Question 1.a.

Puisque la tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse -1 est horizontale (donc de coefficient directeur nul, on a immédiatement : $f'(-1)=0$.

$$f'(-1)=0$$

Question 1.b.

Puisque la fonction *f* est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;4]$, on a immédiatement : $f'(2)<0$.

$$f'(2)<0$$

Question 1.c.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point *B*. Or l'équation réduite de cette tangente est donnée : $y=-x+2$. On en tire immédiatement $f'(0)=-1$.

$$f'(0)=-1$$

Question 2.

Pour tout réel x de l'intervalle $[-1;0]$, on a, par lecture graphique : $2 \leq f(x) \leq 3$.

On en déduit : $\int_{-1}^{0} 2\,dx \leq \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \leq \int_{-1}^{0} 3\,dx$, soit : $2 \leq \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \leq 3$.

$$\boxed{2 \leq \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \leq 3}$$

Partie B

Question 1.

Le point A étant le point de la courbe d'abscisse -1, son ordonnée vaut :

$$f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$$

$$\boxed{f(-1) = e}$$

Question 2.

La fonction f est dérivable et pour tout réel x de l'intervalle $[-2;4]$, on a (dérivée d'un produit) :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1) \times e^{-x} = (1-x-2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, le produit obtenu est du signe de $-x-1$. On a alors : $-x-1<0 \Leftrightarrow -1<x$.
On a donc : $f'(x)<0$ sur l'intervalle $]-1;4]$.

Par ailleurs : $f'(-1) = (-(-1)-1)e^{-(-1)} = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } [-1;4].}$$

Question 3.

La fonction F est, comme la fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout x réel de l'intervalle $[-2\,;4]$ on a :

$$F'(x) = -1\times e^{-x} + (-x-3)\times(-1)\times e^{-x} = (-1+x+3)e^{-x} = (x+2)e^{-x} = f(x)$$

La fonction F est bien une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

Question 4.a.

En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{0} = \left[(-x-3)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = (-0-3)e^{-0} - \left(-(-1)-3\right)e^{-(-1)} = -3+2e$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 2e-3$$

Question 4.b.

A la calculatrice : $2e-3 \simeq 2,44$.
On a bien obtenu une valeur comprise entre 2 et 3.

$$2 \le \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \le 3$$